

加蓋水流且有向下吸入作用之水理探討

徐培原⁽¹⁾ 謝平城^{(2)*}

摘 要

一般研究渠道流場，主要為研究水平流(主流方向)之速度剖面。在求解解析解時，由於水平速度遠大於垂直速度，往往採用完全發展流之假設，將垂直速度予以忽略，來簡化方程式。然而實際上，垂直速度是確實存在之物理量，尤其在水、土交界處，不僅具有水平速度，垂直速度更是不可忽略。本研究討論一耦合之二維流場，包含水層與等向且均質性之孔隙層，水層之控制方程式使用 Navier-Stokes 方程式，孔隙層之控制方程式則使用孔彈性介質理論。藉由引入流線函數，配合邊界條件，能夠求解出水層與孔隙層之速度剖面。最後將結果與前人比較、驗證，發現使用孔彈性介質理論，能夠簡化計算流程，且得到令人滿意的結果。

(**關鍵詞：**耦合流場、Biot 孔彈性介質理論、流線函數)

Hydraulic Analysis of Water Flow in a Closed Conduit with Suction

Pei-Yuan Hsu⁽¹⁾ Ping-Cheng Hsieh^{(2)*}

Graduate Student (1), Professor (2), Department of Soil and Water Conservation, National Chung-Hsing University, Taiwan

ABSTRACT

Generally, studies on channel flow mainly focus on the velocity profiles of the flow in the longitudinal (or streamwise) direction. Since the horizontal velocity is much greater than the vertical one, we usually take the assumption of fully developed flow when generating the analytical solutions. The vertical velocity is then ignored to simplify the governing equations. However, the vertical velocity is actually not negligible, especially at the interface of soil and water, as well as the horizontal velocity. In this study, we discuss a coupled two-dimensional flow field which includes a water layer and homogeneous porous medium layer with suction. In the water layer, Navier-Stokes' equation is employed to describe the flow, whereas in the porous medium layer, instead of Brinkman-extended Darcy equation, poroelastic theory is addressed. Introducing the stream function with boundary conditions, we successfully find the solutions and draw the velocity

(1)國立中興大學水土保持學系碩士生

(2)國立中興大學水土保持學系教授(通訊作者 email: pchsieh@dragon.nchu.edu.tw)

profiles both in the water and the porous medium layer. Finally, by comparing the results with previous study, it shows that the present approach is able to simplify the algorithm process and the results are in a good agreement.

(**Keywords** : coupled flow field, Biot poroelastic theory, stream function)

一、前言

渠道研究中考慮入滲，已成為一種新的趨勢與方向，雖然相關的試驗與文獻多不勝數，但對於從事解析解之研究，要能同時求解出水平速度與垂直速度，實為一大挑戰。由於完全發展流之假設將不再適用，這樣的狀況造成自變數增加，邊界條件也隨之增加，大大提升了求解困難度。因為困難度的提升，本研究希望從最簡單的狀況開始進行，往後再逐一深入探討，期望未來能應用於水土保持坡地水理方面之研究。

Berman(1953)提出具有滲透性的渠道狀況，渠道為上下對稱，且有均勻向外吸出作用，藉由選取適合的流線函數 Ψ ，由流線函數 Ψ 自動滿足二維連續方程式之特性，將納維爾-史托克方程式 (Navier-Stokes equation) 轉變為三階非線性常微分方程式，降低了求解的困難性。此後，許多學者皆利用此轉變法，應用於各研究領域。

Deng(2004)將 Berman(1953)的渠道狀況做了改變，於渠道上方加蓋，形成一不滲透介面，底部則充滿了孔隙介質，孔隙介質底部具有均勻向下吸入作用。有別於 Berman(1953)只探討流體層，Deng(2004)考慮了流體層與孔隙層，增

加研究的難度與豐富性。

本文使用由宋長虹 (1993) 根據 Biot(1956a,1956b)多孔彈性介質理論所建立之多孔介質層流模式，以級數解的方式，對相同物理狀況進行求解。

二、研究方法

一般研究渠道流場，主要為研究水平方向之速度剖面，而本研究所使用之方法，可以計算出垂直與水平方向之速度剖面，進而探討其物理現象。本研究之孔隙層為一具有等向性及均質性之剛性物質，且底部有往下之均勻吸入速度，孔隙層上有水層淹沒覆蓋，水層上再加蓋形成一無滑移之不透水邊界，在孔隙層底部則有均勻吸入速度為 U_w ，如圖 1 所示。

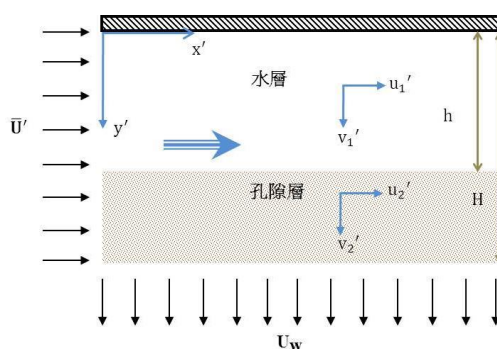


圖 1 本研究示意圖

Figure 1 Schematic diagram of the study.

其中， H 為渠道總高度， h 為水層深度， $\bar{U}'$ 為 $x = 0$ 之水平方向整體斷面平均流速。 u 表示水平速度分量， v 表示垂直速度分量，下標 1 表示水層，下標 2 表示孔隙層。

2.1 數學模式

水層中之動量方程式採用 Navier-Stokes 方程式，而孔隙層之動量方程式則採用 Biot 孔彈性介質理論。在水層與孔隙層之交界處，因無滑移條件不再適用，需使用新的邊界條件。Deng(2004)所採用之邊界條件為速度連續但剪應力不連續，因此在水與孔隙層之交界處產生剪應力跳躍現象。相對於前人 Deng(2004)，本研究因採用 Biot 孔彈性介質理論，且考慮物理現象之合理性，故採用速度與剪應力連續之條件，因此在水與孔隙層之交界處不會有剪應力跳躍之現象，由速度連續與剪應力連續，來取代無滑移條件。

本研究之假設條件如下：

- (1) 流場為二維恆定流場
- (2) 視流體為不可壓縮流體
- (3) 流體為黏滯性牛頓系流體
- (4) 忽略重力項
- (5) 孔隙層具有等向性與均質性
- (6) 孔隙率趨近於定值

2.2 控制方程式

水層控制方程式：

水層之連續方程式以(1)式表示。而動量方程式則採用納維爾-史托克方程式描述水層的運動現象。

$$\text{C.E.: } \nabla \cdot \bar{V}_1' = 0 \quad (1)$$

$$\text{M.E.: } \rho \frac{D\bar{V}_1'}{Dt} = -\nabla P_1' + \mu \nabla^2 \bar{V}_1' \quad (2)$$

其中， $\bar{V}_1'$ ：水層之速度； ρ ：水體密度； P_1' ：水層之壓力； μ ：水之動力黏滯係數。
孔隙層控制方程式：

孔隙層之水流連續方程式與在水層中相同。而動量方程式方面，前人 Deng(2004) 採用拓展達西方程式 (Brinkman-extended Darcy equation)，但在本研究則是使用 Biot 孔彈性介質理論處理水流運動，且視孔隙層顆粒為不變形之剛性介質。

C.E.:

$$\nabla \cdot \bar{V}_2' = 0 \quad (3)$$

M.E.:

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \underline{d}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \underline{D}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \underline{\sigma}_s + b \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 \underline{d}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \underline{D}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \underline{\sigma}_f - b \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right) \quad (5)$$

式中：

$$\rho_{11} = (1-n)\rho_s + \rho_a \quad (6)$$

$$\rho_{12} = -\rho_a \quad (7)$$

$$\rho_{22} = n \cdot \rho + \rho_a \quad (8)$$

$$\underline{\sigma}_s = \underline{\tau}_s - (1-n)P\underline{I} \quad (9)$$

$$\underline{\tau}_s = 2G\underline{e} + \lambda \nabla \cdot \underline{d} \underline{I} \quad (10)$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2} \left[\nabla \underline{V}_2' + (\nabla \underline{V}_2')^T \right] \quad (11)$$

$$b = \mu n^2 / k_p \quad (12)$$

$$\underline{\sigma}_f = -nP_2\underline{I} + n\mu \left[\nabla \underline{V}_2' + (\nabla \underline{V}_2')^T \right] \quad (13)$$

其中， $\underline{\sigma}_s$ ：固體之應力張量； $\underline{\sigma}_f$ ：水之

應力張量； $\underline{\tau}_s$ ：有效應力張量； $\underline{I}$ ：單位矩陣； $\underline{d}$ 、 $\underline{D}$ ：固體和水之位移向量； $\underline{V}_2'$ ：孔隙間水之速度； P_2' ：孔隙間水之壓力； n ：孔隙率； k_p ：比滲透係數， $[L^2]$ ； ρ_s ：固體密度； ρ ：水體密度； ρ_a ：耦合質量參數； μ ：水之動力黏滯係數； G 、 λ ：Lame 彈性係數； T ：矩陣之轉置。

2.3 無因次化控制方程式

水層無因次化控制方程式：

將 $x = \frac{x'}{H}$ ， $y = \frac{y'}{H}$ ， $u_1 = \frac{u_1'}{U_w}$ ， $v_1 = \frac{v_1'}{U_w}$ ，

$P_1 = \frac{P_1'}{\rho U_w^2}$ ，代入(1)、(2)式，其中， H ：

渠道總高度； ρ ：水體密度； U_w ：孔隙層底部均勻吸入速度，得到：

C.E.：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

M.E.：

x 方向：

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

y 方向：

$$u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

將(15)、(16)式消去 P_1 ，再引入 Deng(2004)之方法，選取流線函數

$$\psi_1 = (\bar{U} - x) \cdot f(y) \quad , \quad 0 \leq y \leq \xi \quad (17)$$

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = (\bar{U} - x) \cdot f'(y) \quad (18)$$

$$v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = f(y) \quad (19)$$

將(18)、(19)式代入已消去 P_1 之式子，得到

$$f^{IV} = R \cdot (ff''' - f'f'') \quad , \quad 0 \leq y \leq \xi \quad (20)$$

式中， $R = \frac{\rho U_w H}{\mu}$ 為雷諾數； ρ ：水之

密度； $\bar{U} = \frac{\bar{U}'}{U_w}$ 為 $x = 0$ 之水平方向無因次整

體斷面平均流速； $\xi = \frac{h}{H}$ 為水與孔隙層無因次化交界處； μ ：水之動力黏滯係數。

土層無因次化控制方程式：

將 $x = \frac{x'}{H}$ ， $y = \frac{y'}{H}$ ， $u_2 = \frac{u_2'}{U_w}$ ， $v_2 = \frac{v_2'}{U_w}$ ，

$P_2 = \frac{P_2'}{\rho U_w^2}$ 代入(3)、(5)式，得到：

$$C.E.: \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

M.E.：

x 方向：

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) - \frac{n}{D_a \cdot R} u_2 \quad (22)$$

y 方向：

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) - \frac{n}{D_a \cdot R} v_2 \quad (23)$$

式中， $D_a = \frac{k_p}{H^2}$ 為達西數。

將(22)、(23)式消去 P_2 ，得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \\ & \frac{\partial v_2}{\partial x} - u_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^2 \partial x} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

再引入 Deng(2004)之方法選取流線函數

$$\psi_2 = (\bar{U} - x) \cdot g(y), \quad \xi \leq y \leq 1 \quad (25)$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = (\bar{U} - x) \cdot g'(y) \quad (26)$$

$$v_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = g(y) \quad (27)$$

將 (26)、(27) 式代入 (24) 式，得到

$$g^{IV} - \frac{n}{Da} \cdot g'' = 0, \quad \xi \leq y \leq 1 \quad (28)$$

2.4 無因次化邊界條件

$$f(0) = 0 \quad (29)$$

$$f'(0) = 0 \quad (30)$$

$$g(\xi) = f(\xi) \quad (31)$$

$$g'(\xi) = f'(\xi) \quad (32)$$

$$g''(\xi) = n \cdot f''(\xi) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} g'''(\xi) = n \{ & f'''(\xi) + \frac{f'(\xi)}{Da} + R \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cdot \right. \\ & \left. f'^2(\xi) + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cdot f(\xi) \cdot f''(\xi) \right] \} \end{aligned} \quad (34)$$

$$g(1) = 1 \quad (35)$$

$$g'(1) = 0 \quad (36)$$

以上之邊界條件係引用 Deng(2004) 所採用之邊界條件而再進行修正而得。

2.5.解析解

水層：

$$f^{IV} = R \cdot (ff''' - f'f''), \quad 0 \leq y \leq \xi \quad (37)$$

(37)式為一常係數四階非線性 O.D.E.，在此採用 6 階級數解來近似。

令：

$$\begin{aligned} f(y) = & C_0 + C_1 y + \frac{1}{2} C_2 y^2 + \frac{1}{6} C_3 y^3 + \\ & \frac{1}{24} R(C_0 \cdot C_3 - C_1 \cdot C_2) y^4 + \frac{1}{120} R(RC_0^2 C_3 - \\ & RC_0 C_1 C_2 - C_2^2) y^5 + \left(\frac{1}{720} R^2 C_1 C_0 C_3 - \right. \\ & \left. \frac{1}{720} R^2 C_1^2 C_2 + \frac{1}{720} R^3 C_0^3 C_3 - \frac{1}{720} R^3 C_0^2 C_1 C_2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{720} R^2 C_0 C_2^2 - \frac{1}{360} C_2 R C_3 \right) y^6 \end{aligned} \quad (38)$$

其中， C_0 、 C_1 、 C_2 、 C_3 為待定係數。

再將(38)式代入(28)式，配合邊界條件後即可求解出水層的流速分布。

孔隙層：

$$g^{IV}(y) - \frac{n}{Da} \cdot g''(y) = 0, \quad \xi \leq y \leq 1 \quad (39)$$

(39)式為常係數四階線性 O.D.E.，可得到通解：

$$g(y) = C_1' \cdot e^{-\sqrt{\frac{n}{Da}} y} + C_2' \cdot e^{\sqrt{\frac{n}{Da}} y} + C_3' y + C_4' \quad (40)$$

其中， C_1' 、 C_2' 、 C_3' 、 C_4' 為待定係數，可由邊界條件代入後求解。

由邊界條件 (29)、(30) 可解得 $C_0 = C_1 = 0$ ，再由邊界條件 (31)~(36) 可解待定係數 C_2 、 C_3 、 C_1' 、 C_2' 、 C_3' 、 C_4' 。由邊界條件 (31)~(36)，可得以下 6 個方程式：

$$C_4' + C_3' \xi + C_2' \cdot e^{\frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}} + C_1' \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}} = \frac{1}{2} C_2 \xi^2 + \frac{1}{6} C_3 \xi^3 - \frac{1}{24} R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi^4 - \frac{1}{120} R \cdot C_2^2 \cdot \xi^5 - \frac{1}{360} C_2 \cdot R \cdot C_3 \cdot \xi^6 \quad (41)$$

$$C_3' + \frac{C_2' \cdot \sqrt{n} \cdot e^{\frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{\sqrt{Da}} - \frac{C_1' \cdot \sqrt{n} \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{\sqrt{Da}} = C_2 \cdot \xi + \frac{1}{2} C_3 \cdot \xi^2 - \frac{1}{6} R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi^3 - \frac{1}{24} R \cdot C_2 \cdot \xi^4 - \frac{1}{60} C_2 \cdot R \cdot C_3 \cdot \xi^5 \quad (42)$$

$$\frac{C_2' \cdot n \cdot e^{\frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{Da} + \frac{C_1' \cdot n \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{Da} = n \cdot \left(C_2 + C_3 \cdot \xi - \frac{1}{2} R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi^2 - \frac{1}{6} R \cdot C_2^2 \cdot \xi^3 - \frac{1}{12} C_2 \cdot R \cdot C_3 \cdot \xi^4 \right) \quad (43)$$

$$C_4' + C_3' + C_2' \cdot e^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Da}}} + C_1' \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{Da}}} = 1 \quad (44)$$

$$C_3' + \frac{C_2' \cdot \sqrt{n} \cdot e^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Da}}}}{\sqrt{Da}} - \frac{C_1' \cdot \sqrt{n} \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{Da}}}}{\sqrt{Da}} = 0 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_2' \cdot n^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{Da^{\frac{3}{2}}} - \frac{C_1' \cdot n^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-\sqrt{n}\xi}{\sqrt{Da}}}}{Da^{\frac{3}{2}}} &= n \cdot \left\{ C_3 - R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi - \frac{1}{2} R \cdot C_2^2 \cdot \xi^2 - \frac{1}{3} C_2 \cdot R \cdot C_3 + \frac{1}{s} \left(C_2 \cdot \xi + \frac{1}{2} C_3 \cdot \xi^2 - \frac{1}{6} R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi^3 - \frac{1}{24} R \cdot C_2^2 \cdot \xi^4 - \frac{1}{60} C_2 \cdot R \cdot C_3 \cdot \xi^5 \right) + R \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(C_2 \cdot \xi + \frac{1}{2} C_3 \cdot \xi^2 - \frac{1}{6} R \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \xi^3 - \frac{1}{24} R \cdot C_2^2 \cdot \xi^4 - \frac{1}{60} C_2 \cdot R \cdot C_3 \cdot \xi^5 \right)^2 + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{-1}{8} C_3 \cdot \xi^5 \cdot R \cdot C_1 \cdot C_2 - \frac{29}{360} C_2^2 \cdot \xi^6 \cdot R \cdot C_3 - \frac{7}{24} C_2^2 \cdot \xi^4 \cdot R \cdot C_1 - \frac{1}{60} C_3^2 \cdot \xi^7 \cdot C_2 \cdot R + \frac{1}{90} R^2 \cdot \xi^7 \cdot C_1 \cdot C_2^3 + \frac{1}{864} R^2 \cdot \xi^9 \cdot C_2^3 \cdot C_3 + \frac{1}{4320} \xi^{10} \cdot C_2^2 \cdot R^2 \cdot C_3^2 + \frac{1}{6} C_3^2 \cdot \xi^4 + \frac{2}{3} C_2 \cdot \xi^3 \cdot C_3 + \frac{1}{720} R^2 \cdot \xi^8 \cdot C_2^4 + \frac{1}{48} R^2 \cdot \xi^6 \cdot C_1 \cdot C_2^2 - \frac{11}{120} C_2^3 \cdot \xi^5 \cdot R + \frac{7}{1440} R^2 \cdot \xi^8 \cdot C_1 \cdot C_2^2 \cdot C_3 + \frac{1}{2} C_2^2 \cdot \xi^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

理論上，由以上六個方程式，可以解出 C_2 、 C_3 、 C_1' 、 C_2' 、 C_3' 、 C_4' 六個待定係數，進而得到 $f(y)$ 與 $g(y)$ 之閉和解，但由於解為級數解之型式，外型不僅過於冗長，且考慮到篇幅限制，在此不將閉和解展示。為了與前人 Deng(2004)驗證，本文將參數設定為與前人 Deng(2004)相同，相關參數設定如下，孔隙率 $n = 0.9$ 、水與孔隙層交界處 $\xi =$

0.9、達西數 $Da = 0.001$ 、雷諾數 $R = 5$ ，

代入(41)~(46)式，可解得：

$$C_0 = 0 \quad (47)$$

$$C_1 = 0 \quad (48)$$

$$C_2 = 5.0667 \quad (49)$$

$$C_3 = -5.0997 \quad (50)$$

$$C_1' = -4.2586 \cdot 10^9 \quad (51)$$

$$C_2' = -9.5104 \cdot 10^{-17} \quad (52)$$

$$C_3' = 0.01853 \quad (53)$$

$$C_4' = 0.9829 \quad (54)$$

將 C_0 、 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_1' 、 C_2' 、 C_3' 、 C_4' 、 n 、 Da 、 R 、 ξ 代入(38)、(40)式，得到

$$f(y) = 2.5334y^2 - 0.8499y^3 - 1.0696y^5 + 0.3589y^6 \quad (55)$$

$$f'(y) = 5.0667y - 2.5498y^2 - 5.3482y^4 + 2.1532y^5 \quad (56)$$

$$g(y) = 0.9829 + 0.0185y - 9.5104 \cdot 10^{-17} \cdot e^{30y} - 4.2586 \cdot 10^9 \cdot e^{-30y} \quad (57)$$

$$g'(y) = 0.0185 - 2.8531 \cdot 10^{-15} \cdot e^{30y} + 1.2776 \cdot 10^{11} \cdot e^{-30y} \quad (58)$$

將上述結果代入(18)、(19)、(26)及(27)式可得水層、孔隙層之水平速度與

垂直速度如下

水層垂直速度 v_1 :

$$v_1 = 2.5334y^2 - 0.8499y^3 - 1.0696y^5 + 0.3589y^6 \quad (59)$$

水層水平速度 u_1 :

$$u_1 = (\bar{U} - x) \cdot (5.0667y - 2.5498y^2 - 5.3482y^4 + 2.1532y^5) \quad (60)$$

孔隙層垂直速度 v_2 :

$$v_2 = 0.9829 + 0.0185y - 9.5104 \cdot 10^{-17} \cdot e^{30y} - 4.2586 \cdot 10^9 \cdot e^{-30y} \quad (61)$$

孔隙層水平速度:

$$u_2 = (\bar{U} - x) \cdot (0.0185 - 2.8531 \cdot 10^{-15} \cdot e^{30y} + 1.2776 \cdot 10^{11} \cdot e^{-30y}) \quad (62)$$

由於 Deng(2004)並未針對 $(\bar{U} - x)$ 項進行探討，且並未詳細說明 $(\bar{U} - x)$ 之大小，因此在本文中，將 $(\bar{U} - x)$ 令為 1，可畫出 v_1 、 u_1 、 v_2 、 u_2 。

三、結果與討論

本研究引入流線函數 Ψ ，將 Navier-Stokes 方程式及 Biot 理論，轉變為一組耦合常微分方程式，接著以六階級數解求解，解得整體流速分佈後，再分別描繪水層與孔隙層流速分佈圖。

圖 2 描述水層垂直速度分量 v_1 在 $0 \leq y \leq 0.9$ 之分布情形，該速度分量 v_1 在頂蓋處 ($y = 0$) 為 0，由於孔隙層底部 ($y = 1$) 有向下吸入之作用，因此速度隨著水深增加而逐漸變大，而斜率方面，自頂蓋處至水深約為 $y = 0.53$ 處，斜率呈現增加的趨勢，自 $y = 0.53$ 之後斜率則漸減。

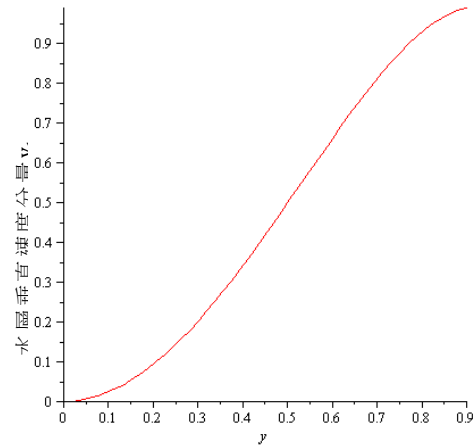


圖 2 水層垂直速度分量 v_1 在 $0 \leq y \leq 0.9$ 之分布

Figure 2 The distribution of vertical velocity v_1 in water layer for $0 \leq y \leq 0.9$

圖 3 描述土層垂直速度分量 v_2 在 $0.9 \leq y \leq 1$ 之分布，可以發現速度雖逐漸增加，但增加之趨勢非常緩慢。

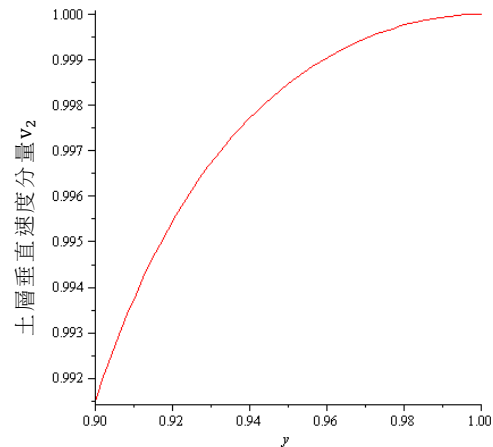


圖 3 土層垂直速度分量 v_2 在 $0.9 \leq y \leq 1$ 之分布

Figure 3 The vertical component velocity distribution in porous medium layer for $0.9 \leq y \leq 1$

圖 4 為結合圖 2 及圖 3 之結果，可以縱觀垂直速度分量 v 在 $0 \leq y \leq 1$ 之分布，得知垂直速度分量 v 在頂蓋處為 0，隨著水深增加而變大，在孔隙層底部 ($y = 1$) 達到最大值 $v = 1$ 。圖 5 則描述水層水平速度分量 u_1 在 $0 \leq y \leq 0.9$ 之分布，在頂蓋處為 0，其後隨著水深增加而逐漸變大，直到 $y = 0.53$ 處達到最大值為 1.64，隨後便逐漸變小。

圖 6 為土層水平速度分量 u_2 在 $0.9 \leq y \leq 1$ 之分布，延續圖 5，速度分量 u_2 在整個區間內逐漸變小，直到孔隙層底部為 0。圖 7 為結合圖 5 及圖 6 之結果，能縱觀水平速度分量 u 在 $0 \leq y \leq 1$ 之分布，可以發現速度分量 u 在頂蓋處為 0，隨後逐漸增加，於 $y = 0.53$ 處達到最大值為 1.64，進入孔隙層 ($y = 0.9$) 後速度快速下降，至孔隙層底部為 0。

整體流速分布如圖 8 所示，係結合圖 4 與圖 7，由於頂部加蓋形成不透水邊界，因此在頂蓋處水平速度分量 u 與垂直速度分量 v 皆為 0，而在水層與孔隙層交界處 ($y = 0.9$)，因採用速度連續與剪應力連續之條件，皆呈現連續之現象。在孔隙層底部 ($y = 1$)，由於該處有向下吸入之作用，因此垂直速度分量 v 為最大值 1。然而，水平速度分量 u 之最大值發生在水深約為 $y = 0.53$ 處，其原因為頂蓋與孔隙層底部兩處皆為無滑移邊界，邊界之阻力造成該兩處水平速度為 0，而越靠近渠道整體之高度中心 ($y = 0.5$)，因阻力逐漸減少，造成水平速度逐漸變大，最後在水深約為 $y = 0.53$ 處達到最大值 1.64，亦即該處之水平速度為孔隙層

底部垂直速度的 1.64 倍。

圖 9 則是將本研究所描繪之整體流速剖面，與前人 Deng(2004) 使用 Runge-Kutta 法之數值解進行比較，發現結果幾乎一致，因此推估拓展達西方程式之非線性項在此物理條件下影響並不顯著。在求解過程中，發現本研究所使用之 Biot 理論，相較於前人 Deng(2004) 所使用之拓展達西方程式，在求解上更為快速，其原因為 Biot 理論本身為一線性動力反應方程式，而拓展達西方程式則具有非線性項，造成求解上會較為繁瑣不便。

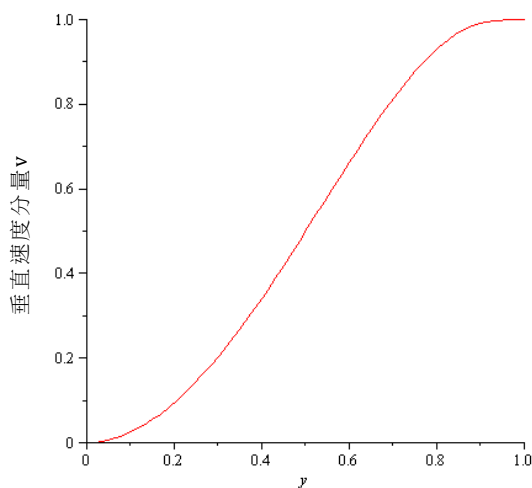


圖 4 垂直速度分量 v 在 $0 \leq y \leq 1$ 之分布

Figure 4 The vertical velocity distribution in porous medium layer for $0 \leq y \leq 1$

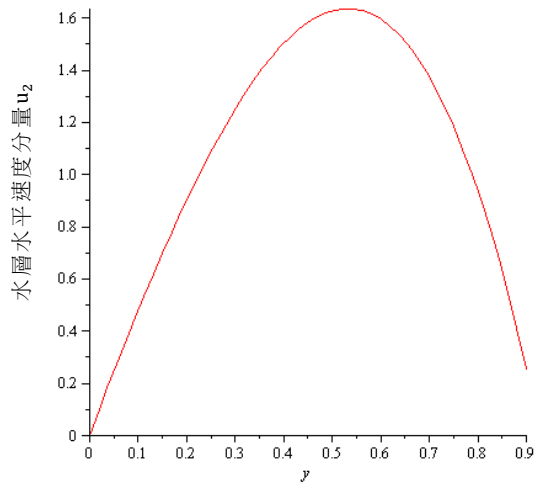


圖 5 水層水平速度分量 u_1 在
 $0 \leq y \leq 0.9$ 之分布
Figure 5 The horizontal component
velocity distribution in water layer

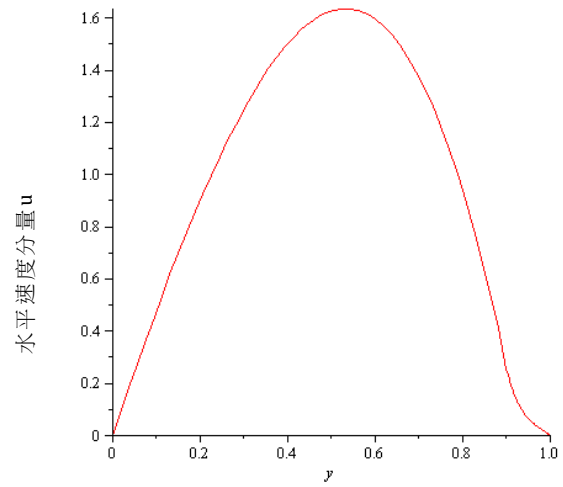


圖 7 水平速度分量 u 在 $0 \leq y \leq 1$ 之分布
Figure 7 The horizontal component
velocity distribution in water layer
at $0 \leq y \leq 1$
 u

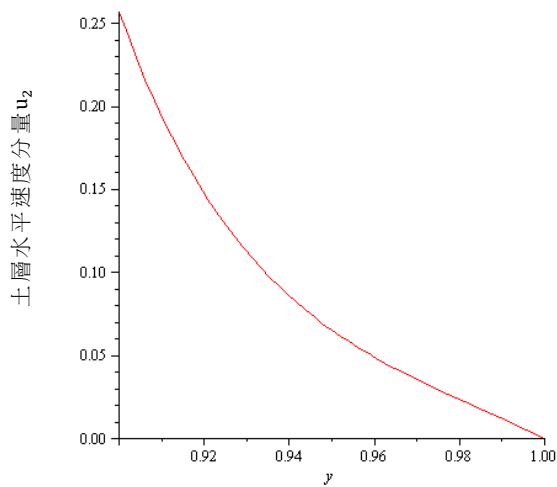


圖 6 土層水平速度分量 u_2 在
 $0.9 \leq y \leq 1$ 之分布
Figure 6 The horizontal component
velocity distribution in water layer
for $0.9 \leq y \leq 1$

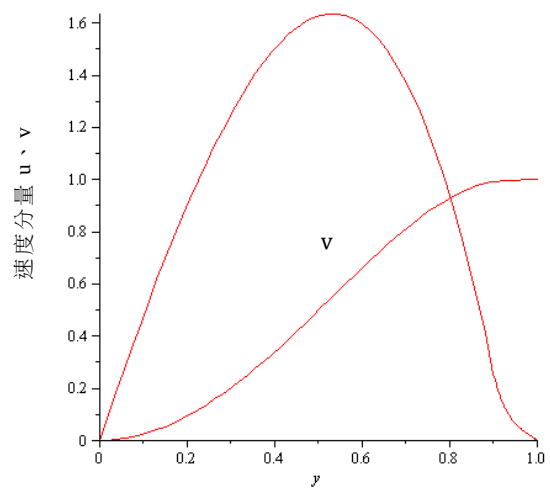


圖 8 速度分量 u 、 v 在 $0 \leq y \leq 1$ 之分布
Figure 8 The horizontal and vertical
component
velocity distribution in water layer
at $0 \leq y \leq 1$

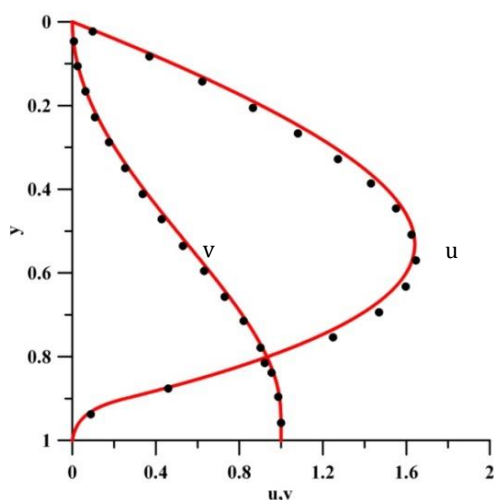


圖 9 本文解析解與前人 Deng(2004)之數值解比較

Figure 9 Comparing to the numerical solution (•) with $Da = 0.001$, $R = 5$, $n = 0.9$, $\xi = 0.9$ (Deng, 2004)

四、結論

本文承襲前人研究，利用流線函數與線性的 Biot 理論求出水平流速 u 與垂直速度 v ，在孔隙層底部 ($y = 1$)，垂直速度分量 v 為最大值 1，而水平速度分量 u 之最大值發生在水深約為 $y = 0.53$ 處，最大值為 1.64。發現使用 Biot 理論，在相同之邊界條件下，結果幾乎一致，因此推估拓展達西方程式之非線性項在此物理狀況下影響並不顯著。往後對於孔隙層之控制方程式選用，線性的 Biot 孔彈性介質理論實為一強而有力的理論，尤其對於解析解之研究，非線性方程式往往造成求解上困難重重，而線性的 Biot 理論，不僅在求解上會較為快速，而且能夠達到精確的結果。

本文所使用之流線函數，可同時求得水平流速 u 與垂直速度 v ，但由於流線函數之設定型式並非單一，對於不同的物理現象，所適用的型式也可能不盡相同，希望後續之研究能針對假設之型式進行探討，找出其他可能的型式與適用狀況。此外，由水平流速 u 之閉合解外型，可以推斷水平流速 u 應隨水平位置 x 而變化，但 Deng(2004)並未針對 $(\bar{U} - x)$ 項進行探討，因此建議往後之研究應加以探討 $(\bar{U} - x)$ 項，了解水平流速 u 隨水平位置 x 的變化情形，使物理模型更趨完整。

之後，希望能將此方法運用於坡地水理土壤入滲之研究上，考慮坡度並移除頂蓋，使物理現象更接近於坡地水流，再搭配合理的相關物理參數、修正方程式與邊界條件，即可求解坡地水流之速度分布。

參考文獻

1. 宋長虹(1993)，「水波作用下多孔彈性底床動力反應之研究」，國立台灣大學土木工程學系研究所博士論文。
2. Berman A. S. (1953), "Laminar Flow in Channels with Porous Walls," *Journal of applied physics*, 24:1232-1235.
3. Biot, M. A. (1956a), "Theory of propagation elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. low-frequency range," *Journal of Acoustical society of America*,

- 28:168-178.
4. Biot, M. A. (1956b), "Theory of propagation elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. high-frequency range," Journal of Acoustical society of America, 28:179-191.
 5. Cash, J., Karp, A variable order Runge-Kutta method for initial-value problems with rapidly varying right-hand sides. ACM Transactions on Mathematical Software 16, 201-222.
 6. Deng C., Martinez D. M. (2004), "Viscous flow in a channel partially filled with a porous medium and with wall suction," Chemical Engineering Science, 60:329-336.
 7. King J. R. and COX S.M., (2001), "Asymptotic analysis of the steady-state and time-dependent Berman problem," Journal of Engineering Mathematics 39:87-130
 8. Kuznetsov, A.V. (1998). Analytical investigation of Couette flow in a composite channel partially filled with a porous medium and partially with a clear fluid. International Journal of Heat and Mass Transfer 41, 2556-2560.
-

103 年 03 月 17 日收稿

103 年 03 月 19 日修改

103 年 03 月 26 日接受

水土保持學報 46 (3): 1093 – 1104 (2014)

Journal of Soil and Water Conservation, 46 (3): 1093 – 1104 (2014)