

地下水介紹(二)

地下水運動的基礎—達西定律與水力傳導度

梁昇*·黃天福**

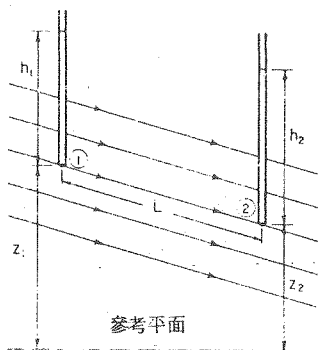
一、緒言

地下水幾乎一直在移動中，唯其移動之速度可能很慢。基本上，地下水常以每年一至五百公尺的速度範圍在水平方向或橫向移動；而通氣層中之水分子移動而經過限制層如棲止層或阻水層則幾乎是垂直方向的（向上或向下）。本文僅考慮地下水之水流（正壓力水流），但通氣層中之水分移動則不予考慮。

二、達西定律(Darcy's Law)

地裡水移動之分析上，水分子流經土壤或含水層材料孔隙、裂隙、裂縫之真實彎曲路徑均被視為水分子直接平緩地通過固體顆粒，此假設的水分子平緩移動路徑稱為流綫（Streamlines）。

圖一顯示在地下水面下一平行於水流方向之含水層橫斷面中之綫性的且平行的流綫系統。由於流綫都是成直綫的相互平行，水流並不隨距離而改變，此種水流稱為均勻流（Uniform flow）；與其相對者稱為非均勻流（Nonuniform flow）。非均勻流會隨距離而改變且流綫可能彎曲、發散或縮束（如流入水井之地下水流，由地下水流入河溪或由河流流入地下水之水流，以及其他二維、三維或對稱軸〔Axisymmetric flow〕系統）。圖一中之一維水流亦假定為穩流，即水流不隨時間改變。假若水流會隨時間而改變（例如與補注盆地地下水面升高有關的水流或環繞著抽水井與其地下水面下降有關的水流），此種水流稱為非穩定流（Nonsteady）或遞變流（Transient）。



圖一：具綫性且平行流綫之地下水斷面

假如將一管壓計置於一流綫上之兩點（圖一中之點1與點2），則在該條流綫上地下水之速度可由下式計算：

$$V = K \frac{(h_1 + z_1) - (h_2 + z_2)}{L} \quad (1)$$

式中 V = 達西水流速度（長度／時間）

h_1 = 點1之壓力水頭（長度）

z_1 = 點1之高度頭（長度）

*國立中興大學水土保持學系副教授

**嘉義農專講師

h_2 = 點 2 之壓力水頭 (長度)

z_2 = 點 2 之高度頭 (長度)

L = 點 1 和點 2 間沿流綫所測得之距離 (長度)

K = 土壤或含水層材料之水力傳導度 (長度/時間)

方程式(1)及其修正式均稱為達西方程式 (Darcy's equation)，此方程式是西元一八五六年法國文學家亨利·達西 (Henri Darcy, 1856) 所提出的。他發現流速與水力坡降 (Hydraulic gradient) 成正比。達西流速 (Darcy velocity) 並非真正的整體流速 (Macroscopic velocity) 而是水流通過垂直於水流方向，包括固體及孔隙之橫斷面積之速度。在水流系統某一已知點處之壓力水頭相當於一嵌入該已知點管壓計之高度。某點之高度水頭 (Elevation head) 是該點在任意水平參考平面 (圖一之虛綫) 上之垂直距離。在水流系統中某點、壓力水頭與高度水頭之和稱作總水頭 (Total head)。因此，方程式(1)中之 $h_1 + z_1$ 是點 1 處之總水頭 H_1 ， $h_2 + z_2$ 是點 2 處之總水頭 H_2 ，沿著流綫上點 1 和點 2 間的距離為 L ，此值 ($H_1 - H_2$) / L 稱為水流之水力坡降 (Hydraulic gradient)。

基本上，達西定律係說明 V 直接與水力坡降成正比 (方程式(1))。比例因子 K 表示土壤或岩石質材之特徵，稱作水力傳導度 (Hydraulic conductivity)。 K 的單位同於達西速度，因水力坡降係無因次， K 之因次是以同於 V ，即以長度除以時間，較常用的 K 單位是公尺/日。 K 值依土壤或含水材料孔隙之大小與數目而定，粒狀材料之 K 值如下：

黏土 (表面) (Clay soils (surface))	0.01 ~ 0.2 公尺/日
深處粘土岩床 (Deep clay beds)	10^{-8} ~ 10^{-2} 公尺/日
壤土表面 (Loam soils surface)	0.1 ~ 1 公尺/日
細砂 (Fine sand)	1 ~ 5 公尺/日
中砂 (Medium sand)	5 ~ 20 公尺/日
粗砂 (Coarse sand)	20 ~ 100 公尺/日
礫石 (Gravel)	100 ~ 1000 公尺/日
砂與礫石混合物 (Sand and gravel mixes)	5 ~ 100 公尺/日
粘土、砂及礫石混合物 (Clay, sand and gravel mixes)	0.001 ~ 0.1 公尺/日

砂岩之水力傳導度比起同粒徑之非固結砂小得很多，此乃砂岩固結後密度較大所致。其他固體材料之 K 值完全依岩石次生孔隙率 (Secondary porosity, 意指裂隙、風化、碳酸塩岩石之溶解水脈等等) 而定。固結材料之一般 K 值範圍如下：

砂岩 (Sandstone)	0.001 ~ 1 公尺/日
有次生孔隙率之	
碳酸塩岩石 (Carbonate rock with secondary porosity)	0.01 ~ 1 公尺/日
頁岩 (Shale)	10^{-7} 公尺/日
稠密的堅硬岩石 (Dense solid rock)	10^{-5} 公尺/日
破碎或風化之岩石 (含水層) (Fractured or weathered rock (aquifers))	0.001 ~ 10 公尺/日
破碎或風化之岩石 (岩石樣本) (Fractured or weathered rock, core sample)	大部分 0 ~ 300 公尺/日

其他固結與非固結材料之K值，可參Davis(7)的報告。

由於V視為水流經過整個多孔材料、固體及孔隙之速度，所以通過一已知垂直於水流方向橫斷面積之體積流率 (Volume rate of flow) 可簡單計算如下：

$$Q = VA$$

式中 Q = 體積流率 (長度³ / 時間)

V = 達西速率 (長度 / 時間)

A = 垂直於水流方向之面積 (長度²)

譬如，有一含水層之達西速度為 0.1 公尺/日，含水層垂直於水流方向之斷面為厚 10 公尺，寬 1000 公尺，則含水層之流量為 1000 立方公尺/日。

由於水分子移動實際上是通過含水層材料之孔隙及裂隙，因此真正的流速或可見的流速大於達西流速。假定水流流經流綫方向上總體流速的一束毛細管 (圖二)，則真正流速 V_m 與達西流速 V 間之關係如下

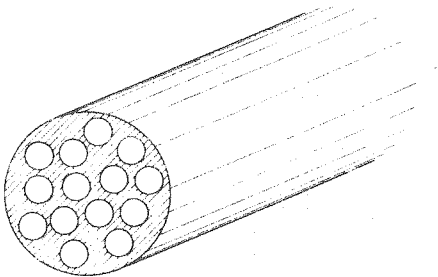
$$V_m = \frac{A}{A_{cap}} V \quad (3)$$

式中 A = 垂直於水流方向之總面積。

A_{cap} = 毛細管橫斷面面積之和

因為，比值 A_{cap}/A 係孔隙率 n，所以方程式(3)可寫成

$$V_m = \frac{V}{n} \quad (4)$$



圖二：平行維管束

在理論上，方程式(4)僅當在圖二之直毛細管模式下才是正確的，然在實際上方程式(4)對於土壤中之含水層材料中之真正流速也可得合理的估計。關於這方面已有人以小比例尺系統 (Small-scale System) 和大比例尺系統 (Large-scale system) 來印證。在小比例尺系統中，水在數分鐘內僅移動數公分(5)，在大比例尺系統中，水移動 50 公里需二萬年以上(22)。

三、試驗室測定水力傳導度(Hydraulic Conductivity)

在室內利用一能維持水流通土樣以測定流率與通過土樣橫斷面之水頭損失的裝置，將一特定材料之圓柱體形樣本置於其中即可決定水力傳導度，這樣的裝置稱作通滲儀 (Permeameters)。通滲儀分成二類 (圖三)。其一乃是壓力水頭在水流入與流出兩端都保持固定的定水頭通滲儀 (Constant head

permeameter)。降落水頭可使直立管中之水位降落而得，直立管之直徑與樣本相較應為極小。恒定水頭可藉著水溢過樣本頂端來維持，從圓柱形樣本流出之水可用一盛水器承接，再倒入量筒來測定（圖三左圖）。水力傳導度極低的材料均採用降落水頭滲儀，而定水頭滲儀僅適合測定砂及礫石之類的高透水材料之K值。

應用達西方程式（方程式(1)）於定水頭滲儀時，解得K為

$$K = LQ / H\pi R^2 \tag{5}$$

式中 K = 樣本之水力傳導度

H = 總損失水頭（樣本上定水位與定高度流出圓柱筒上水位間之垂距）

L = 樣本高度

Q = 體積流率（流出裝置之下方量筒測得者）

R = 通滲儀內樣本之半徑

對降落水頭通滲儀而言，體積流率可利用窄直立管中水位降落之速率 dH/dt 表如 $Q = \pi r^2 dH/dt$ （參圖三右圖，符號即如其代表的意義），或者利用達西方程式水流通過樣本之原理而表成 $Q = K\pi R^2 H/L$ 。令二式相等，積分並解得K

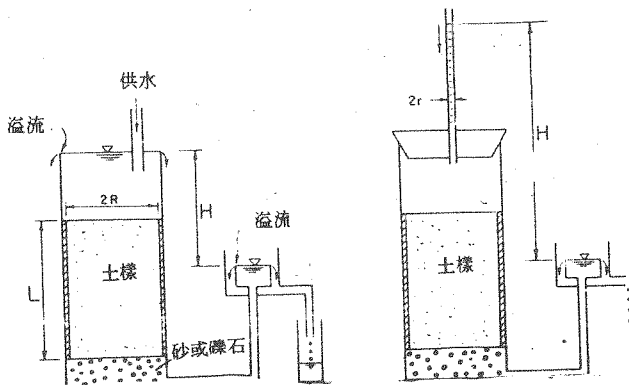
$$K = \frac{Lr^2}{tR^2} \ln \frac{H_1}{H_2} \tag{6}$$

式中 H_1 與 H_2 = 某時距 t 之開始與結束時之H值

r = 直立管之半徑

t = 直立管中，水位由 H_1 降至 H_2 所需的時間。

縮短降落水頭滲儀試驗所需的時間可藉升高H與減低r而達到目的。



圖三：定水頭通滲儀（左）與落水頭通滲儀（右）

在通滲儀內，臨接樣本下方的砂或礫石層須比樣本粗大極多，如此一來，因非樣本水頭之損失即可略去不計（有時，樣本置於濾幕上而不用砂或礫石濾層）。在測定K值之前，樣本必須水飽和。樣本僅在真空情況下，才可完全飽和。由於一多孔材料內顆粒重新排列及孔隙大小之變化將使K值發生很大改變，因此樣本應儘可能地接近自然狀況。取得這種樣本已有特殊技術。因為真正不擾亂的地下材料樣本既使可能的話也是極難取得，所以野外技術在現場測定而得的自然材料之數據要比室內測定者更為可靠。

四、達西定律的有效性

達西方程式僅適用於層流，由於此種層流速度甚低，而且水分子近似平行地沿著孔隙靠固體邊界之平滑路線運行（在均勻直徑的毛細管中，水分子真正地平行沿著管壁的路徑移動）就像達西方程式所表達的，層流受流體黏滯力控制，以致水頭損失與流速成綫性關係。如速度增加，達到某點限界，流體就受到慣性力的控制，水分子則呈不規則之路徑前進（甚至在直管中亦然），形成渦流、迴流以及像其他快速流動河溪中所見到的擾亂，稱作亂流（Turbulent flow）。在亂流中，水頭損失依流體速度指數關係變化（如明渠中或管道內完全發展之亂流為速度的二次方）。

地下水移動幾乎都是層流。當孔隙與水力坡降均甚大時會形成亂流，此種現象發生在抽水井之附近（如礫石堆填區擴展部）或者發生於極多孔隙之地層（玄武岩、多孔石灰岩），特別是接近噴泉或滲流之水流集中處。有時水可在大的地下水脈中流動，如多孔的石灰岩中，此種水流不再是多孔介質水流，應依明渠水流或管流處理。

在流體力學中，水流型別以雷諾數 N_R (Reynolds number) 來區分。雷諾數係一無因次數值，它表示流體中慣性力與黏滯力之比值

$$N_R = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (7)$$

式中 V = 流速

D = 導管之特性因次（在滿水管流中即為水管直徑）。

ρ = 流體密度（公克／立方公分）

μ = 流體黏滯力（泊 (Poise) 或公克／立方公尺／秒）

工程應用上，比值 u / ρ 常視作一參數，稱作動黏滯性 ν ，其因次為長度／時間²（正規上採公分／秒²）。當 N_R 小於 2100 時，管流即屬層流。若 N_R 超過 2100 或更大，水流由層流漸變成完全的亂流。對於通過粒狀介質之水流來說， V 取達西速度， D 取平均粒徑 D_{50} %。在多孔介質中觀察到亂流始自 N_R 等於 60 到 700（14, 18, 24）。在 N_R 很低時也有不合達西方程式的 (18)，即使在水流狀似層流的情況亦然，這可能是多孔介質水流在彎曲路徑內之慣性力已受影響所致，儘管如此，對於大部分地下水分移動來說， N_R 都小於 1，因此達西定律是正確的。

當水流通過密致粘土的狀況下，達西定律也可能不正確。這是因為此種材料之孔隙非常小，孔隙內的水分子受到粘粒電雙層效應的影響。由於水分子具有雙極性，當水接近帶電荷之粘粒時就形成結晶或像冰之結構。水形成此種結構時，其黏滯性高於自由水 (Free water)，在水力坡降小時可能不足以促使水分移動，若水力坡降提高到水分開始流動之水力坡降時，流率與水力坡降所呈非綫性關係與達西定律截然不同 (26)。其他引起通過密致粘土水流偏離達西水流尚有粘粒之移動與粘粒重新排列等現象。粘粒之移動與粘粒重新排列係由於流動水，電動流勢能 (Electrokinetic Streaming potential) 的形成，以及電滲逆流 (Electrosmotic counterflow) 三種力量的摩擦拖曳力所引起 (10, 17)

除非水流立刻地環繞抽水井，否則地下水文學中鮮少考慮地下水的非達西行為 (Non-Darcian behavior) 的。其理由有：1. 非達西水流鮮少發生 (25)，2. 地下水流系統非常難以正確地求解（由於含水層之異質性及不正確的幾何知識與邊界條件），3. 非達西水流之分析非常複雜而且涉及採用隨 N_R 而變的水力傳導度數值 (27)。

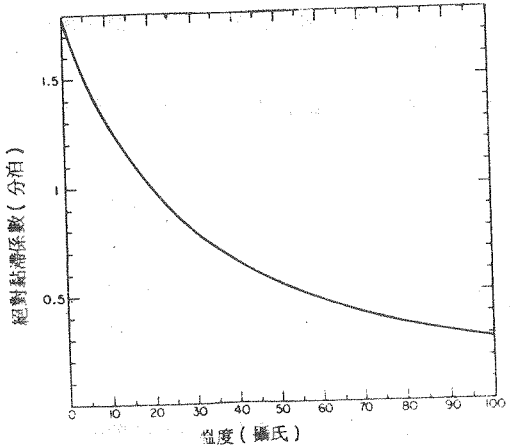
五、影響水力傳導度之因素

某一土壤或含水層之水力傳導度受溫度、水中離子成分，以及壓擠空氣存在之影響。溫度對 K 值的影

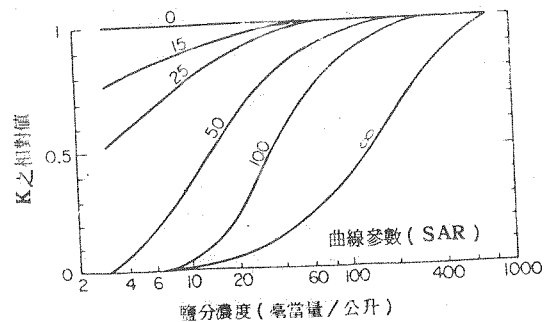
是由於溫度對水黏滯性之效應，溫度愈高，水之黏滯性愈低，水分因而較易通過土壤或含水層中的孔隙，此時K值較大。溫度影響黏滯性而對K值的效應是呈綫性關係，如黏滯性減低 50 %，K 值為原來的 2 倍。K 值一般以 20 °C 時之 K 值為準，其他溫度之 K 值可依下式計算

$$K_t = \frac{u_{20}}{u_t} K_{20} \quad (8)$$

式中 K_t = 溫度 t 時之 K 值
 u_t = 溫度 t 時，水之絕對黏滯性
 u_{20} = 溫度 20 °C 時，水之絕對黏滯性
 K_{20} = 溫度 20 °C 時之 K 值
 u 與水溫之關係表如圖四



圖四：水絕對黏滯值與溫度之關係



圖五：Pachappa 沙質壤土中土壤溶液鹽分濃度與 SAR 對水力傳導度之影響

如多孔材料中含有粘土，並假設水中陽離子尚未與粘粒電雙層中之陽離子處於平衡狀態時，水之離子成分則將影響 K 值，它引起離子交換現象，因而將改變粘粒由原來的絮聚 (Flocculated) 而成分散狀態，接著導致 K 值降低；反之亦然。此種現象主要發生於外來水注入土中的地方，如灌溉，地下水補注，土地處理或廢液之深井注入等。

當水流經過一土壤時，水中之陽離子對於 K 之影響甚大，如圖五所示之巴查巴砂質壤土 (Pachappa sandy loam) (為一種加州土壤)，在此圖中之 SAR 值是鈉吸收比，可由 Na^+ ， Ca^{2+} ， Mg^{2+} 之濃度毫當量/公升，計算如下：

$$SAR = \frac{Na}{N(Ca + Mg)/2} \quad (9)$$

對一已知鹽份濃度而言，由綫代表 K 值隨著 Na 含量之增加而降低，此時則 SAR 值較高。如 SAR 值為已知時，K 值隨著溶液濃度之增加而提高，這是因為土壤水分中含 Na^+ 濃度與鹽分總濃度對於粘土之絮聚一分散狀態之影響所致。

地下水流經密緻粘土層時，地下水之離子成分與鹽分濃度均會改變。因為粘土中的孔隙非常小，以致水中較大離子被滯留在孔隙中，黏重土

(Heavy soils) 粘土，頁岩即為具有這種選擇性的地質網膜，此即為篩鹽效應 (Salt-Sieving effects) (1, 12, 15, 29,)。水力坡降大時，單價陽離子較雙價陽離子易受滯留，但在水力坡降小時 Ca 反比 Na 易於滯留。單價陽離子受滯留之順序為鈣 < 鈉 < 鎂 < 鉀 < 銨 < 鉀 < 鈉，雙價陽離子則為鎂 < 鈣 < 鉀 < 鉀。由上述討論知流經粘土層水流之陽離子成分與鹽分濃度之改變可改變粘土之絮聚一分散狀態且鹽篩作用能改變粘土層或其他細材料土層之水力傳導度(13)。

土壤中含水層材料中的壓擠空氣，實質上阻塞孔隙而使 K 值小於該材料在完全飽和時之 K 值。壓擠空

氣可能發生於水面升高時，它也促使材料由未飽和情況受潮至孔隙水產生負壓力後之K值僅為完全飽和情況K值的一半(2)。壓擠空氣會因較低溫的外來水湧入含水層而可能聚積於含水層中。此乃因外來水進入含水層之後，水溫升高，水溫升高能使部分溶解空氣釋出溶液而且聚積於含水層材料之孔隙中。當未除氣(De-aired)的水以補注井注入較溫暖的含水層時會發生此現象，是為著名的空氣阻塞作用或空氣凝結作用(Air blocking or air binding)，K值因之降低。

六、固有通滲率與水力傳導度單位

方程式(8)說明ku乘值係一常數。它是組成固有通滲率K之基本成分，固有通滲率係用以表示多孔介質之通滲性，它僅是介質之一特質而與流體密度及黏滯性無關，通滲率可定義為

$$K = \frac{K u}{\rho g} \quad (10)$$

式中 K = 水力傳導度 (長度/時間)

u = 流體之絕對黏滯性 (P)

ρ = 流體密度

g = 重力加速度

u以公克/公分·秒表示， ρ 以公克/公分³表示，g以公分/秒²表示。K以公分/秒表示，則於程式(10)說明K後以公分²表示。在習慣上K之單位為達西(Darcy)。一達西係等於 9.8×10^{-8} 公分²，固有通滲率很少在地下水文學中使用，它主要應用於以處理不同粘滯性與密度之地下流體，液體與氣體的石油與天然氣工業上。較好的水力傳導度單位是公尺/日，採用此單位時水力傳導度值可有一合理的數值範圍(由絕對不透水材料之0到非常透水材料之1000公尺/日或更大)。此單位意義明顯，且與應用於水文學與工程學中其他公制單位(長度，表面積，體積流量等等)相互一致。

水力傳導度之英制單位包括每小時或每日之時數或每日之呎數，以及每日通過1平方呎橫斷面與一單位水力坡降之美國加侖數(每日加侖/平方呎)。每一單位水力坡降之美國加侖數之標準狀態是在60 F，稱為米因德(Meinzer)，以紀念美國水文學家米因德(O. E. Meinzer)。米因德也可表成每日通過1呎×1哩橫斷面與1呎/哩水力坡降之美國加侖數。有時，此單位已被誤作另一個被稱作水力傳導度田間係數之單位，實際上二者單位意義不同，因米因德之橫斷面因次以哩乘得，而梯度因次却以哩除之，此二因次因而互抵銷，故使二單位雖同因次而意義實異。

各種水力傳導度與固有通滲率之單位可依下列數值轉換：

1達因 = 0.831 公尺/日

1公分/秒 = 864 公尺/日

1公尺/日 = 0.0254 公尺/日

1呎/日 = 0.3048 公尺/日

1米因德 = 0.0408 公尺/日 (在華氏60度或攝氏15.56度)

七、含水層水流與通移率(Aquifer Flow and Transmissivity)

A、含水層之水流

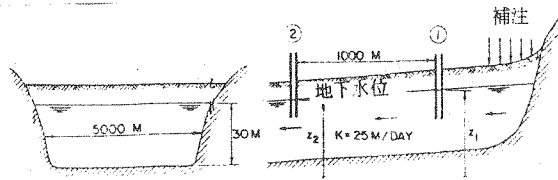
方程式(1)可用來計算含水層中之一維水流，如圖六裡山間沖積河谷中之非拘限含水層。此圖中的含水層主要經由河谷頭部之沖積扇而補注，在河谷中之地下水流主要與河谷邊界之縱向方向平行(像在一大水槽中)。含水層由砂層與礫石層所組成，且其平均水力傳導度達25公尺/日，兩支管壓計相距1,000公尺，設置於河谷中心線上。第一支管壓計之水位比第二支管壓計高0.4公尺，這表示第一支管壓計處之

地下水面大於第二支管壓計 0.4 公尺，點 1 與點 2 間含水層之平均高度為 30 公尺，含水層之平均寬度為 5,000 公尺，地下水流之體積流率為何？

假定地下水流係平行綫性的水流，且無外加水亦無抽出（既無其他來源也無耗損），應用達西方程式於任一綫流綫，例如在地下水面之頂端流綫，可將含水層中之流量計算出來。在地下水面處之壓力水頭為零。應用方程式(1)於點 1 與點 2 間地下水面之流綫得到

$$V = 25 \cdot \frac{(0 + z_1) - (0 + z_2)}{1000} \quad (11)$$

z_1 與 z_2 分別是地下水面在點 1 與點 2 對任意參考平面上之高度頭。由於 $z_1 - z_2 = 0.4$ 公尺（管壓計所示），計得到 V 為 0.01 公尺／日。因為流綫都被認為是互相平行的。在地下水面下之其他所有流綫有相同的水力坡降，因此有相同的達西速度。以 V 乘以垂直於水流方向之含水層橫斷面積即可得到含水層之總流量 $Q = 30 \times 5000 \times 0.01 = 1,500$ 公尺³／日。如此流量為含水層長期平均流量情況之代表流量，則含水層之安全出水量將是 1,500 公尺³／日。



圖六：山間河谷非拘限含水層之橫斷面（左）及剖面（右）

方程式(11)之水力坡降為 $(z_1 - z_2) / 1000$ ，它即為地下水面之坡度 i 。因此，如水流主要是在水平方向上，非拘限含水層中可用地下水面之坡度當作水力坡降來計算流量。拘限含水層亦同，它採用管壓表面坡降為水力坡降，於是方程式(1)變成 $V = K i$ ， i 是地下水面或管壓表面的坡度。以垂直於水流方向之含水層橫斷面（ WD ）面積乘以 V 即可得到含水層之體積流率 Q ，即

$$Q = WDK i \quad (12)$$

式中 W = 含水層寬度（圖六裡此值為 5,000 公尺）

D = 含水層高度（圖六裡為 30 公尺）

B 、通移率（Transmissivity）

在方程式(12)裡出現的乘積 DK 時常結合成為一參數，稱為含水層之通移率（Transmissivity），符號為 T 。 KD 亦稱作可通移性（Transmissibility），然而在語意上通移率較為正確，因為水是流通過，通移的含水層的(19)。拘限含水層或非拘限含水層之通移率通常都利用水井之抽水試驗來估計。 T 之因次為長度²／時間如公尺²／日；假如 K 表成米因賽單位， T 之單位為每日每呎之美國加侖數即每日加侖／呎（1 公尺²／日 = 80.5 每日加侖／呎）。採用地下水面坡度 i 以及通移率 T ，則含水層之流率可以下面簡單方程式計算：

$$Q = WT i \quad (13)$$

式中 W 為垂直於水流方向之含水層寬度

八、杜普特—福加瑪假設與達西定律應用於簡單水流系統

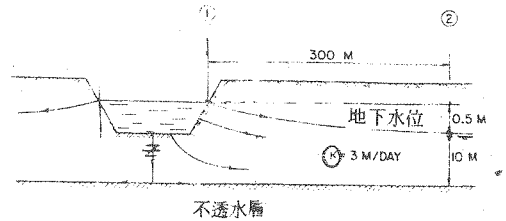
一維水流之達西定律表如方程式(1)之形式，它可用以解算各種側向或垂直地下水流之簡單系統，由於某些系統有垂直與水平流兩種分量。所以方程式(1)應用前，這些系統必須簡化成單一方向之水流。地下水

流基本上是橫向流動，因此垂直水流分量時常忽略不計；然後水流被認為純粹是水平面流動且在深度上均勻分佈。這些假設，總括稱為杜普特—福嘉瑪假設(8)。下述有關水流系統一些例題，即應用此假設以方程式(1)解算之。

A、渠道滲流 (Seepage flow from channels)

圖七表洪水平原中之一條河流，全體土壤包括河溪周圍之濕周，都被認為是均勻的土壤，因此河道中水流與洪水平原之地下水保持水力上的直接接觸，在河溪底部下方短距離處有一水平不透水層，離河道300公尺處管壓計中之水位低於河溪水0.5公尺，不透水層位在管壓計水位下10公尺處。假設土壤K值為3公尺/日，河溪滲流損失如何？

解答此水流系統時，集中於渠道下之垂直水流分量（開始於渠道底部之流綫最初都是垂直向下）不計，且視所有水流為水平方向移動。水流亦視為沿著水面下之深度均勻分布。先是杜普特（1863），繼之福嘉瑪都使用這個假設，稱作水平流或杜普特—福嘉瑪假設。



圖七：淺層非拘限含水層上之溪流滲流

Charny (23) 證實應用杜普特—福嘉瑪假設於緩坡地下水水面下之水流可得到正確解。

解答圖七水流系統時，可應用達西方程式於由渠道邊緣（斷面1）至管壓計位置（斷面2）水面下水流。今僅計算出應用達西方程式於斷面1與斷面2間之頂端流綫（沿地下水水面）且利用不透水層作為參考平面以決定高度頭可得：

$$V = 3 \cdot \frac{(0 + 10.5) - (0 + 10)}{300}$$

或 $V = 0.005$ 公尺/日。根據杜普特—福嘉瑪假設，在地下水水面下所有之水流都以此速度移動。在計算體積流率時，取斷面1與斷面2間不透水層之上地下水面的平均高度作為水流系統之高度，即10.25公尺。將水流系統之寬度取為1公尺，則滲流量可表以單位溪流長之滲流。橫斷面積為 $1 \times 10.25 = 10.25$ 公尺²，則滲流量為每公尺河溪長 $0.005 \times 10.25 = 0.05125$ 公尺³/日。假定河道另一邊的情況相同（換言之，水流系統是對稱的），總流量為每公尺河溪長度0.1025公尺³/日。

如不透水層深度增加，杜普特—福嘉瑪理論就不正確。因為不透水層深度增加相對地增加垂直水流之重要性。Bouwer(3)比較杜普特—福嘉瑪理論與電阻類比法。在電阻類比法將垂直水流列入計算所得之滲流率，他發現只要河溪底下不透水層之距不超過河溪水位寬度的兩倍。杜普特—福嘉瑪理論可得到合理的滲流值。

B、地下逕流 (Subsurface runoff)

圖八表一淺層山坡土壤之地下水流排入河溪。土地坡度為2%，土壤為砂質土壤，其 $K = 2.5$ 公尺/日，不透水基岩位於整個坡面下6公尺深處。為了減低河溪的污染。將污水處理廠直接流入河溪之污水噴灑於距河溪某些距離之土地上，入滲之後，污水變成地下逕流往坡下排回河溪中。地下水流以及有關的土地過濾作用 (Land filtration) 大大地改善污水品質，以致河溪污染負荷大大減低。此種系統必須精心設計操作以避免地表污水逕流，假若噴灑裝置之使用率為2公尺/日，則在任何時間可供噴灑面積之最大寬度為何？

當處理場與溪流間的土壤完全飽和且地下水水面與土壤表面一致時，可以得到最大地下流量。飽和土

壤的通移率將為 $2.5 \times 6 = 15$ 公尺²/日，應用方程式(13)於每單位系統長度之最大地下流量 q 為

$$q = 1 \times 15 \times 0.02$$

$$= 0.3 \text{ 公尺}^2 / \text{日} / \text{公尺}$$

在寬度 W 之面積上之滲透率為 2 公分/日，則每單位系統長度之流率為 $0.02 W$ 公尺³/日/公尺。因此，無地表逕流時 W 最大值为

$0.3 / 0.02 = 15$ 公尺。如土壤在一星期內僅有一天接受污水，則

處理場之寬度須 105 公尺且必須分成 7 條 15 公尺寬之平行條帶，每星期輪灌一次。

C、均勻入滲與進入河溪的排水 (Uniform infiltration and drainage to a stream)

一降水與入滲水經由底部有水平不透水層之非拘限含水量而排入河溪之系統如圖九。假定有一均勻入滲率且屬穩流狀況，則在山頂之平衡地下水面位置有多高？

應用杜魯特—福嘉瑪理論，距山頂 X 距離處之地下水速度 V_x 為

$$V_x = -K \frac{dh}{dx}$$

dh/dx 係在該點處之地下水面坡度，由於 h 隨著 X 之增加而減少，所以 dh/dx 是負的。此負號必須放在達西方程式之 dh/dx 前，使 V 在 h 減少之方向上為正。在 X 距離處每單位系統長度之流量 q_x 為

$$q_x = -K h \frac{dh}{dx}$$

平衡時， q_x 亦等於 P_x ，故得

$$P_x = -K h \frac{dh}{dx}$$

或

$$K h dh = -P_x dx$$

將山頂與河溪邊緣為界之方程式積分得

$$K (h_1^2 - h_2^2) = PL^2$$

或

$$h_1 = \sqrt{h_2^2 + \frac{PL^2}{K}}$$

式中 h_1 = 山頂處，不透水層上地下水面之高度

h_2 = 河溪中不透水層上水位之高度

L = 山頂與河溪間之距離

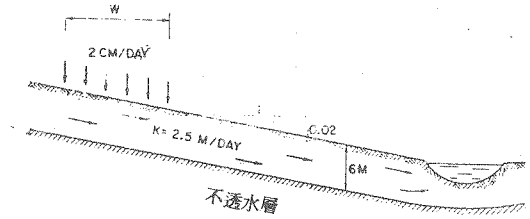
P = 入滲率 (長度/時間)

K = 土壤之水力傳導度

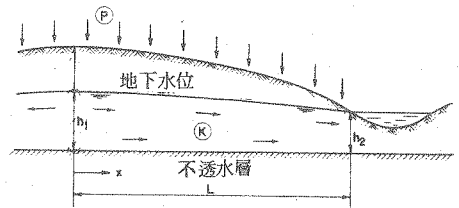
D、垂直水流引起管壓計測定地下水面之誤差

有一冰川漂積層之非拘限含水層，由其頂部補注 (降雨之入滲作用)，然後水垂直地向下流經一阻水層進入一漏性拘限含水層 (圖十)，管壓計置於地下水面下 10 公尺之深度處，如滲透率為 1.5 公分/日，非拘限含水層之 K 為 0.2 公尺/日，則管壓計之水位與真正地下水面之差異如何？

位於地下水點①之壓力水頭為零，點②之壓力水頭等於 h ，亦即是管壓計中水位之高度。以管壓計



圖八：污水之地中排放與流向河川之地下逕流



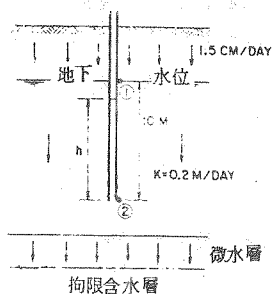
圖九：降雨之入滲與排向河川

之管底作為參考水平面。點①之高度頭為 10 公尺，點②之高度頭為零，然後應用方程式 (1) 於點①至點②之垂直水流得到

$$0.015 = 0.2 \frac{(0 + 10) - (h + 0)}{10}$$

計算結果 h 為 9.25 公尺，因此管壓計中之水位在含水層真正的地下水水面下 0.75 公尺處。

此結果顯示，假若在含水層中有垂直水流發生時，由壓力計中之水位不能得到真正的地下水位置。而與水力傳導度有關之垂直流率愈高，誤差也就愈大，為了將誤差減低至最小程度，管壓計貫入含水層之深度應盡可能的減少。如地下水面波動不足，則須將數支管壓計安置於波動區內之不同深度，以含水層中得到最淺的管壓計之水位數值作為地下水位置之最佳估計值。

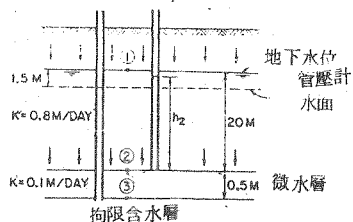


圖十：在有垂直流的非拘限含水層之管壓計

E、漏性含水層之補注率 (Recharge rate of Leaky Aquifer)

某一非拘限含水層下之拘限含水層之管壓面在非拘限含水層地下水面下 1.5 公尺處，而二含水層為一層厚 0.5 公尺之阻水層所分隔 (圖十一)。非拘限含水層中之地下水面在阻水層頂部之上 20 公尺處，而且地下水面與由阻水層上面因入滲作用而發生之向下水流保持平衡。非拘限含水層之 K 為 0.8 公尺/日，阻水層之 K 為 0.1 公尺/日。由非拘限含水層至拘限含水層之流率為何？

欲計算通過阻水層之流量，必須知點②處之壓力水頭。因僅點①處至點③處之壓力水頭為已知 (分別是地下水面及管壓表面)，為了解點②處之壓力水頭，必須應用方程式 (1) 於點①與點②之間，及點②與點③之間。由於從點①處至點②處之流率與從點②至點③處者相同，因此得到有二個未知數 (點②處之向下流速 V 及壓力水頭 h_2) 的二個方程式，這二個都可解之。以阻水層之底部當作高度頭之參考平面，所獲得的方程式為：



圖十一：垂直向下水流自非拘限含水層流過微水層而達到拘限含水層

$$\text{點①與點②間 } V = 0.8 \frac{(0 + 20.5) - (h_2 + 0.5)}{20}$$

$$\text{點②與點③間 } V = 0.1 \frac{(h_2 + 0.5) - (19 + 0)}{0.5}$$

解此二方程式得到 $h_2 = 18.75$ 公尺及 $V = 0.05$ 公尺/日。

若阻水層之 K 小於非拘限含水層之 K 甚多， h_2 將會非常接近 20 公尺。由此非拘限含水層中之地下水位置，可用於該情況以近似地決定點②處之壓力水頭。

F、暫棲地下水面之高度 (Height of Perched water table)。

一大到 3 公分/日之快速入滲作用 (例如春天融雪) 使一低入滲層上面形成暫棲地下水面。此限制層位於 2 公尺深處，厚 0.4 公尺， K 為 0.01 公尺/日 (圖十二)，限制層上面之材料為坩質壤土 (Silt loam)， $K = 0.12$ 公尺/日。在限制層下面之材料為粗砂與礫石。水流通過限制層之後，以不飽和水流之形式通過砂與礫石後達到非拘限含水層，問暫棲地下水面在限制層上之高度為何？

解此水流系統須應用達西方程式於暫棲地下水之水流與通過限制層之水流加以運算。位於限制層底部之壓力水頭是負的，負值之大小依限制層底部材料之未飽和水力傳導度而定，由於其為粗粒材料 (砂與礫

石)， h_3 負數很小（維持近飽和），且取為零。點 2 之壓力水頭 h_2 之值，可應用方程式 (1) 由點 2 與點 3 計算出來，以限制層底部作為高度頭之參考平面，得到

$$0.03 = \frac{(h_2 + 0.4) - (0 + 0)}{0.4}$$

得 h_2 為 0.8 公尺。暫棲地下水之高度 Z 可應用達西方程式由點 1 與點 2 計算出來，即

$$0.03 = 0.12 \frac{(0 + Z + 0.4) - (0.8 + 0.4)}{Z}$$

解得暫棲地下水水面高度 $Z = 1.067$ 公尺。

G、河川水位對洪水平原之地下水水位之影響

一洪水平原位於高透水之礫石層之上，且該礫石層與渠外之河川保持水力之接觸（圖十三）。而不透水基岩在礫石層之下，由於礫石層之水力傳導度較之洪水平原上之土壤甚高，因此任何時候都以河溪水面高度作為整個礫石層之管壓水面。間當一洪水使得河川深由 H_1 突升至 H_2 ，在礫石層上土壤中之地下水水面升高多少？

欲計算洪水平原之地下水水面升高速率時，須知道礫石層上面土壤之 K 及可充水孔隙率 f (Fillable porosity)，可充水孔隙率係地下水水面升高前後容積含水量之差數。在土壤中之達西速度 V 與地下水面上升率 dz/dt 間之關係為

$$\frac{dz}{dt} = \frac{V}{f} \quad \text{或} \quad V = f \frac{dz}{dt} \quad (14)$$

當地水面在礫石層上之高度為已知， V 亦可用達西方程式表示成

$$V = K \frac{H - Z}{Z} \quad (15)$$

式中 $H = H_2 - H_1$ ，或是河川水位之升高（圖十三），因方程式 (14) 與 (15) 相等，可得到

$$f \frac{dz}{dt} = K \frac{H - z}{z}$$

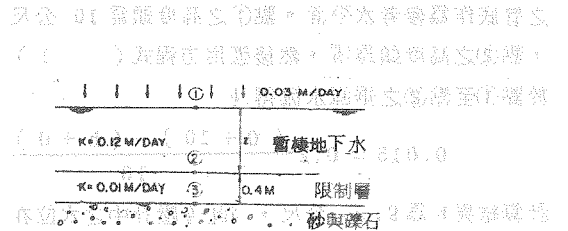
此式積分得到 $-z - H \ln(H - z) = \frac{K t}{f} + C$ (16)

式中 C 為積分常數。由於 $t = 0$ 時 $z = 0$ 。因此 C 等於 $-H \ln H$ ，將此 C 值代入方程式 (16) 移項，得

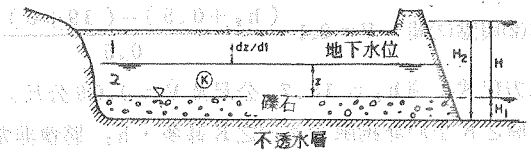
$$\frac{K t}{f} = H \ln \frac{H}{H - z} - z \quad (17)$$

如 K ， f ， H 均已知，則洪水平原地下水水面升至透水礫石層上某高度 z 之時間可計算出來。

本節之例題說明如何利用達西方程式來解答種種一維地下水分移動問題，較複雜水流系統之解，包括水流流入井中，以及模式應用與類此技術等等則將列入以後的節章。



圖十二：滲透期限制層上的暫棲地下水



圖十三：由於河川高水位而引起洪水平原地下水水位之上升

九、異向性(Anistropy)

粒狀地下材料之個別顆粒鮮少是球形的，在水的作用下沈積時，顆粒通常都以他們的扁平面停留下來。在流動水流作用下沈積之顆粒可能在水流方向上傾斜而略為重疊（圖十四）。此種排列，稱為瓦狀構造（Imbrication），在礫石沈積層中時常可以見到。

水分子流經瓦狀構造材料之垂直路徑較水平方向者更為彎曲。因此，垂直方向上之水力傳導度 K_z 小於水平方向上之水力傳導度 K_x ， K_z 值通常僅為 K_x 值之 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{10}$ 。此種現象為（未受擾亂的）沖積層之鐵則無例外的，是稱為異向性。如所有方向上之 K 值均相同，此種材料稱作等向性材料。此種等向性之情況可由近圓形顆粒組成之土壤或在實驗室中以玻璃珠或乾土或濕土混合堵塞空隙所形成之結構體而獲得。

異向性不僅係由顆粒排列所引起，亦因不同 K 值材料所層化而得，即使每層本身都是同向性的材料亦然。例如由砂層與礫石層組成之含水層將表現得像一異向性介質。因為垂直水流通過砂層與礫石層所受之阻力大於通過礫石層為主的水平流，如砂層與礫石層之 K 為已知，則整個砂層與礫石層集合體之 K_z 及 K_x 可按下述計算出來。



圖十四：河流淤積之石礫瓦狀分布

由不同厚度 z 與不同 K 值之 n 個水平同向層組成之含水層或地質層如圖十六所示。如有水平流通過此系統，每一層中之水力傳導度均相同（如果 i 相同且為同時，壓力水頭差異將會沿兩層間之交界面存在，對水平流來說這種現象是不可能的。在此系統頂層每單位寬度之流量 q ，可表如下式

$$q_1 = i K_1 z_1 \quad (18)$$

在其他層中之水平流亦可相似地表達（如 $q_n = i K_n z_n$ ）。

將每層之 q 值加起來得到層狀系統之水平總流量 q_x

$$q_x = i (K_1 z_1 + K_2 z_2 + \dots + K_n z_n) \quad (19)$$

假若圖十六之層狀系統為一種均勻之介質，則 q_x 亦可被表成

$$q_x = i K_x z \quad (20)$$

式中 K_x 是水平方向上介質之平均傳導度， z 是整個系統之高度，由方程式 (19) 及 (20) 相等可得 K_x 為

$$K_x = \frac{K_1 z_1 + K_2 z_2 + \dots + K_n z_n}{z} \quad (21)$$

如每層均等厚，方程式 (21) 可簡化成

$$K_x = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n} \quad (22)$$

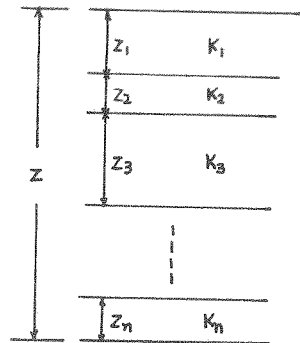
式中 n 為層數。

如有垂直水流通過圖十五之系統，頂層之單位水平面積之流量 q 可表如

$$q = K_1 \frac{\Delta H_1}{z_1} \quad (23)$$

式中 ΔH_1 為第一層中之總損失水頭，解此方程式得 ΔH_1 為

$$\Delta H_1 = \frac{z_1}{K_1} q \quad (24)$$



圖十五：不同 K 值與厚度之水平異向層組成系統

由於各層 q 均相同，通過其他地層之 H 可用相似的方式表示（如 $\Delta H_n = z_n q / K_n$ ）。流過系統中全部地層之垂直水流總損失水頭 H_t 為各層損失水頭之和，即

$$\Delta H_t = \left(\frac{z_1}{K_1} + \frac{z_2}{K_2} + \dots + \frac{z_n}{K_n} \right) q \quad (25)$$

如果圖十五之系統為一均勻介質則垂直流量可表如

$$q = Kz \frac{\Delta H_t}{z} \quad (26)$$

式中 Kz 為垂直方向上介質之平均水力傳導度，解方程式 (26) 求得 H_t ，使求得 H_t 與方程式 (25) 相等解得 Kz

$$Kz = \frac{z}{\frac{z_1}{K_1} + \frac{z_2}{K_2} + \dots + \frac{z_n}{K_n}} \quad (27)$$

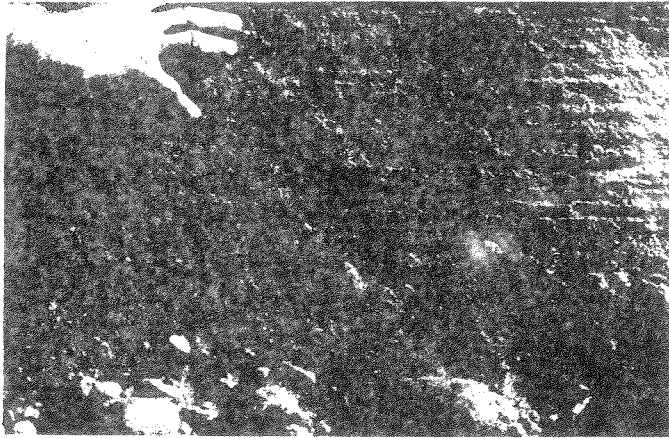
假若各層均等厚，則方程式可簡化為

$$Kz = \frac{n}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}} \quad (28)$$

式中 n 為層數。

方程式 (21) 與 (22) 表示一群數的算術平均值 (Arithmetic mean)，而方程式 (27) 與 (28) 則表示諧和平均值 (Harmonic mean)。觀察這些方程式可知和諧和平均值 Kz 較之算術平均值 K_x 更易受一群數目中極小值的影響。事實上，一特定群之諧和平均值總是小於算術平均值。所以當一水平層狀介質被當作一均勻，異向性系統處理時， Kz 總是小於 K_x 。

在沖積中不同層厚度變化範圍由數公厘或更薄 (圖十六) 至數公寸或更厚 (圖十七)。圖十六微層結構 (Microstratification) 相當均勻，原大約有 50 公分厚的砂層，此砂層本身即為異向性的。然而



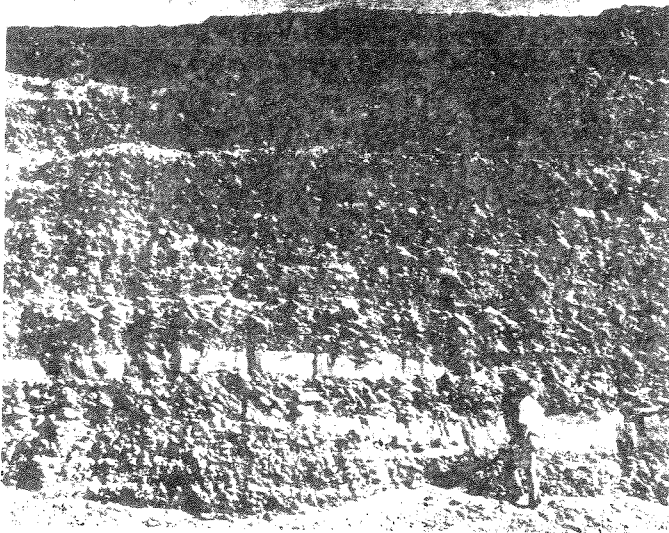
圖十六：與礫石屑同質地之砂層微構造

在圖十七礫石坑下游約 15 公里處由補注盆地地下水之升高測得相似於圖十七之含有砂層與礫石層含水層却具定向水力傳導度 $Kz = 5.4$ 公尺/日， $K_x = 86$ 公尺/日 (4)。Weeks (28) 也曾發現威斯康辛州 (Wisconsin) 中部冰河沖積層含水層之 K_x/Kz 比值為 2—20。

應用達西方程式於一異向性系統時，必須根據水流方向決定水力傳導度 (K_x 為水平流， Kz 為垂直流

)，在其他方向上之K值可為 $\sqrt{K_x}$ 及 $\sqrt{K_z}$ 為主軸之橢圓面之關係求得。馬斯開特 (Muskat) 已找出定向通滲率之橢圓面理論，其理論說明由一異向介質中之某點在各方向上繪出定向K之平方根值可形成橢圓

$$\frac{x^2}{\sqrt{K_x}} + \frac{z^2}{\sqrt{K_z}} = 1$$



圖十七：砂與礫石互層構造

在大部分狀況下，沖淤地均被認為具雙向性的異向性，即水平和垂直的兩方向。然而，就大面積而言，含水層與地下水盆地中流水作用引起沈積層却又可在水平面上呈現異向性，尤其下游方向的 K_x 可大於垂直方向者。其原因是因為礫石層，埋沒河谷，以及相似的粗質地層在形成時，水流方向上比垂直方向之結構更為接近。所以此種含水層為三維異向性，其為垂直方向之主K軸，平行於過去盛行河流方向之K軸以及與河流成直角水平方向的K軸。

十、參考資料

1. Berry, F.A.F., 1969. Relative factors influencing membrane filtration effects in geologic environments. *Chem. Geol.* 4:295-301.
2. Bouwer, H., 1966. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water Resour. Res.* 2:729-738.
3. Bouwer, H., 1969. Theory of seepage from open channels. In *Advances in Hydrosience*, vol. 5, V.T. Chow(ed.), Academic Press, New York and London, pp. 121-172.
4. Bouwer, H., 1970. Groundwater recharge design for renovating waste water. *J. Sanit. Eng. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 96(SA1):59-74.
5. Bouwer, H., and R.C. Rice, 1968. A salt penetration technique for seepage measurement. *J. Irrig. Drain. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 94(IR4):481-492.
6. Darcy, H., 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, pp. 570, 590-594, V. Dalmont, Paris.
7. Davis, S.N., 1969. Porosity and permeability of factual materials. In "Flow Through Porous Media," R.J.M. DeWiest(ed.), Academic Press, New York and London, pp. 53-89.
8. DeWiest, R.J.M., 1965. History of the Dupuit-Forcheimer assumptions in groundwater hydraulics. *Trans. Am. Soc. Agric. Eng.* 8:508-509.
9. Dupuit, J., 1863. *Études theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux decouverts et a travers les terrains permeables.* Dunod, 2d ed., Paris.
10. Elnaggar, H.A., G.M. Karadi, and R.J. Krizek, 1974. Non-Darcian flow in clay soils. In *Flow : Its Measurement and Control in Science and Industry*, vol. 1, R.B. Dowdell and H.W. Stoll(eds.), Instrument Society of America, Pittsburgh. pp. 53-61.
11. Forchheimer, P., 1901. *Hydraulik. Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* 4:20 B.G. Teubner, Leipzig.
12. Groenevelt, P.H., and G.H. Bolt, 1972. Permselective properties of porous materials as calculated from diffuse double-layer theory. In *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, International Association for Hydraulic Research, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, pp. 241-258.
13. Hardcastle, J.H., and J.K. Mitchell, 1976. Water quality and aquitard permeability. *J. Irrig. Drain. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 102(IR2) :205-220.
14. Hubbert, M.K., 1956. Darcy's law and the field equations of underground fluids. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng.* 27:222-239.
15. Kharaka, Y.K., 1971. "Simultaneous flow of water and solutes through geological membranes: Experimental and field investigations." Ph. D. dissertation, Univ. of California, Berkeley, 274 pp.
16. Kharaka, Y.K., 1973. Retention of dissolved constituents of waste by geologic membranes. *Proc. 2nd Internat. Symp. Underground Waste Management and Artificial Recharge. Am. Assoc. Pet. Geol.* 1:420-435.
17. Kutilek, M., 1972. Non-Darcian flow of water in soils — laminar region. In *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*, International Association for Hydraulic Research, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, pp. 327-340.
18. Lindquist, E., 1933. "On the flow of water through porous soil." *Premier Congres des grand barrages.* pp. 81-101, Stockholm.
19. Lohman, S. W., et al., 1972. Definitions of selected ground-water terms—revisions and conceptual refinements. U.S. Geol. Survey Water Supply Paper 1988, 21pp.
20. McNeal, B.L., 1968. Prediction of the effect of mixed-salt solutions on the soil hydraulic conductivity. *Proc. Soil Sci. Soc. Am.* 32:190-193.

21. Muskat, M., 1937. *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, McGraw-Hill Book Co., New York. (Reprinted 1946, J.W. Edwards, Ann Arbor, Mich.)
22. Pearson, F.J., Jr., and D.E. White, 1967. Carbon-14 ages and flow rates of water in Carrizo Sand, Atascosa County, Texas. *Water Resour. Res.* 3: 251-261.
23. Polubarinova-Kochina, P.Y., 1962. *Theory of groundwater movement*. Translated from the Russian by R.J.M. DeWiest, Princeton University Press, Princeton, N.J.
24. Schneebeli, G., 1955. Experiences sur la limite de validite de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un ecoulement de filtration. *Houille Blanche* 10:141-149.
25. Sunada, D.K., 1969. *Laminar and turbulent flow of water through porous media*. Final Report, CER68-69DK533, Colorado State University, Fort Collins.
26. Swartzendruber, D., 1969. The flow of water in unsaturated soils. In *Flow through Porous Media*, R.J.M. DeWiest(ed.). Academic Press, Inc., New York and London, pp. 215-292.
27. Volker, R.E., 1975. Solutions for unconfined non-Darcy seepage. *J. Irrig. Drain. Div., Am. Soc. Civ. Eng.* 101(IR1):53-65.
28. Weeks, E.P., 1969. Determining the ratio of horizontal to vertical permeability by aquifer-test analysis. *Water Resour. Res.* 5:196-214.
29. White, D.E., 1965. Saline waters of sedimentary rocks. In *Fluids in Subsurface Environments*, A. Young and J.E. Galley (eds.), *Am. Soc. Petrol. Geol. Mem.* 4:342-366.