

二維多孔體流散係數之研究

曹舜評⁽¹⁾ 萬鑫森⁽²⁾

摘要

溶質在二維多孔體中的傳輸，須同時考慮縱向流散及橫向流散，在現有之理論中流散係數的取得，多半須進行兩次實驗，才可以分別求取縱向流散係數 D_L 及橫向流散係數 D_T 二參數，而且要等到實驗已達穩定狀態，多孔體中之濃度剖面不再變化時方可求得 D_T 。本研究之目的在找出一簡便之方法，可在同一次實驗中之連續狀態時，同時求取二參數。

本研究設計一容器，以石英極細砂為多孔體，鉀離子為溶質，進行二維流散實驗，對於二維流散方程式，給予適當之起始及邊界條件，在同一深度 $x=L$ ，不同 y 點以多管收集器定時收集流出液，繪製各點之相對濃度-時間曲線圖(突破曲線)，可由一次實驗， $y=0$ 曲線上 $\frac{C}{C_0} = \frac{1}{4}$ 之特定時間 t 求得 v ，同時由該時間 $y=0$ 及任一點 y 之曲線斜率 $S_{t,0}$ 、 $S_{t,y}$ ，求得方程式之參數 D_L 、 D_T 。其中

$$D_L = \frac{L^2}{16 \pi S_{t,0}^2 t^3}, \quad D_T = \frac{y^2}{4 t (\operatorname{erfc}^{-1} \frac{S_{t,y}}{S_{t,0}})^2}$$

關鍵詞：溶質傳輸、二維流散、橫向流散係數、多孔體

(1) 國立中興大學水土保持研究所博士班研究生

(2) 國立中興大學水土保持研究所教授

前 言

溶質在多孔體的傳輸，在宏觀上所遵循之基本觀念為：濃度梯度與流通量(flux)成正比及質量守恆定律，以此為基礎推出了對流-流散方程式(convection - dispersion equation)。

在一維流散方程式中，只考慮與水流同方向之縱向流散(longitudinal dispersion)，或稱為縱向延散。在二維流散之研究中，除了要考慮縱向流散外，尚須考慮垂直水流方向之橫向流散(transverse dispersion)，或稱為側向流散(lateral dispersion)，橫向流散的基本機制是分子隨機之擴散，由濃度高之處向濃度低處移動，當多孔體中有水分流動時，將溶質往前帶動時，會使具有濃度差之範圍加大，因而橫向流散會更加顯著(Cussler, 1984, p.87)。流散係數(dispersion coefficient)為傳輸方程式中重要的參數，受多孔體的均質性，溶質濃度、黏滯性、溫度、壓力等因子影響，若能知道流散係數與平均孔隙流速，則可利用流散方程式之解析解或數值模擬預測溶液在某時刻之濃度剖面，藉以了解溶質傳輸之時間及範圍。

一維流散係數之研究，一般是在實驗室中，利用土柱進行試驗，再用實測之突破曲線(Breakthrough curve)配合

解析解或曲線擬合來決定縱向流散係數(Nielsen and Biggar, 1962 ; Lai and Jurinak, 1971, 1972 ; Wann, 1977; van Genuchten and Wierenga, 1986...)。相對地橫向流散係數的研究就少了許多(Grane and Gardner, 1961 ; Harleman and Rumer, 1963 ; Yule and Gardner, 1978 ; Han *et al.*, 1985 ; Robbins, 1989 ; Leij and Dane, 1990)，在二維狀況下，邊界條件的種類多，增加其複雜性，至目前尚未有標準之典範。

本研究之目的，即以二維流散方程式為基礎，在特定之起始及邊界條件下進行實驗，研究二維流散之特性，並由實驗數據繪出突破曲線，再依據曹舜評、萬鑫森(1994)之數學推求，在一次實驗之連續狀態下，計算出縱向及橫向流散係數，以驗證此數學推求之正確性，以了解理論推求與實驗之差距。

理論基礎

影響溶質在二維多孔體流動之因素甚多，為簡化問題，在本研究中採用之假設如下：

1. 在實驗室中控制多孔體為一均質之結構。

2. 使溶質在飽和多孔體中移動，並使多孔體中的水分含量維持定值。
3. 溶液之流動僅受重力影響，即在單位梯度下進行實驗，假設在此情況下之水流為層流。
4. 鉛直向下定為坐標x軸之正向，因有重力效應，具有速率，縱向流散係數為 D_L ；水平方向定為y軸，垂直水流方向，橫向流散係數以 D_T 代表。同時假設 D_L 、 D_T 為多孔體之特性，不隨溶質之濃度改變，因多孔體為均質，故流散係數不隨位置而變。
5. 假設溶質與多孔體之間無化學反應，溶質不會沈澱、降解、消失。

基於上述之假設，考慮溶質在二維多孔體中傳輸時，其基本方程式可寫為：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (1)$$

D_L ：縱向流散係數 ($L^2 T^{-1}$)

D_T ：橫向流散係數 ($L^2 T^{-1}$)

C ：溶液濃度 ($\text{mol } L^{-3}$)

v ：平均孔隙流速 ($L T^{-1}$)

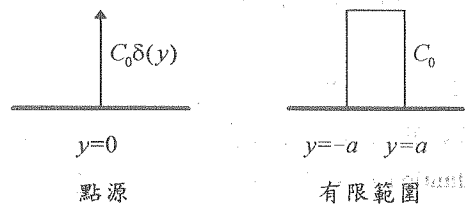
t ：時間 (T)

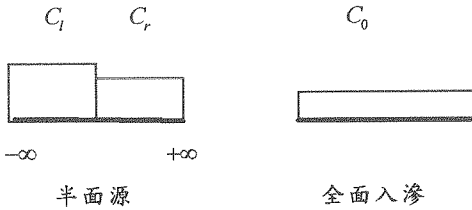
一般解二、三維之對流-流散方程皆以數值方法求其解，但數值方法常伴

隨誤差的產生，而解析解本身是一真正的解，可以檢驗數值方法之錯誤，因此在理論研究中，解析解自有其實用性。當然解析解亦有其限制，因為只有在某些特殊的起始邊界條件下，可以求得解，而且在進行解析解時必須有許多假設，才能簡化條件，在實際上這些假設不見得適當。在實驗室中則盡量使假設之條件成立。

在二維流散的研究中溶質之來源在時間上之區分為瞬間溶質來源 (instantaneous source)、連續性溶質來源 (contineous source)，而在連續源所造成之結果又可分為連續狀態和穩定狀態，連續狀態即溶質在多孔體內之濃度剖面隨時間繼續變化，穩定狀態為長時間以固定濃度之溶質加入多孔體時，多孔體內之濃度剖面不再變化時之情況。

二維溶質之來源在空間上可區為點源，有限範圍之溶質來源，半面源與全面入滲（即一維），其分類之示意圖如下：





在現有之理論中，多半以易於在實驗室中可進行之起始及邊界條件作為解析解之依據。現將一些前人之研究分述如下：

(一) 瞬間點源

相對於在多孔體中遷移之時間，若給予溶質的時間很短，即可視為瞬間源。

$$C(0,0,t) = M \delta(t) \quad (2)$$

表在位置 $x=0$ 、 $y=0$ 處給予時間極短之瞬間源。若在二維平面下只施於一狹小之範圍，在尺度上此範圍遠小於系統所據有之空間時，即可視為點源，一般以

$$C(x,y,0) = M \delta(x) \delta(y) \quad (3)$$

表在 $t=0$ 時給予一極小範圍之點源，二式中之 δ 在數學上表 Dirac delta function，表在一小範圍內給予一無窮之量，其性質有

$$\begin{aligned} \delta(t-t_0) &= \infty & t &= t_0 \\ \delta(t-t_0) &= 0 & t &\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt &= 1 \\ \int_a^b \delta(t-t_0) f(t) dt &= f(t_0) & a < t_0 < b \\ \int_a^b \delta(t-t_0) f(t) dt &= 0 & t_0 < a, t_0 > b \end{aligned} \quad (4)$$

Hunt(1978)研究溶質在均勻地下水中流動之方程式時，提出了瞬間、連續性、穩態點源之一、二、三維之解析解時，在二維瞬間點源之問題上，以

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(x,y,0) \rho dx dy \quad (5)$$

作為初始之濃度分佈，式中 ρ 表孔隙率。可解得(1)式之解析解為

$$C(x,y,t) = \frac{M}{4\pi\sigma t \sqrt{D_L D_T}} \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{4D_L t} - \frac{y^2}{4D_T t}\right] \quad (6)$$

在 Fried and Combarous (1971, p.229)、Crank (1975, p.29)、Cussler (1984, p.89) 等文中皆可見到相似之結果。此式與常態機率密度函數(normal probability density function)相似，單變數之常態分佈為

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (7)$$

式中 μ 表平均值， σ 表標準差。因此可藉由 $C - x$ 圖、 $C - y$ 圖利用常態分佈之性質來求取 D_L 、 D_T 。

(二) 連續性源

1. 穩定狀態半平面源

在既有之研究上，於多孔體邊界施以連續性固定濃度之溶質，多半等到溶質之流動達穩定狀態時，來描述二維流散之現象，此時多孔體內之濃度剖面不再隨時間變化，即 $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ 。

Harleman and Rumer(1963) 假設在多孔體中具有穩定均勻之流動，並假設長時間後忽略縱向流散之效應，此時

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \text{ 因此可將(1)式簡化為}$$

$$v \frac{\partial C}{\partial x} = D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (8)$$

給予之邊界條件為

$$\begin{aligned} C(0, y) &= C_0 & -\infty < y < 0 \\ C(0, y) &= 0 & 0 < y < \infty \\ \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \pm \infty} &= 0 & x > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

若利用傅立葉轉換 (Fourier Transform) 可得解析解為

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\frac{D_T x}{v}}} \quad (10)$$

式中 erfc 為餘誤差函數

在試驗時可測定某位置 (x, y) 上之相對濃度值，利用(10)式由 $\frac{C}{C_0}$ 找出誤差函數表上相對應之值，同時計算相對應之 $\frac{y}{2\sqrt{x/v}}$ 值，將二數點繪在坐標軸上，測得多點之數值後，在坐標上繪出最佳之擬合直線(best-fit straight line)，此直線之斜率即為 $\frac{1}{\sqrt{D_T}}$ 。

在求取 D_L 之方法上，Harleman and Rumer(1963)仍以一維方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} \quad (11)$$

並輔以適當之起始及邊界條件

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= 0 & x \geq 0 \\ C(0, t) &= C_0 & t \geq 0 \\ C(\infty, t) &= 0 & t \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

得解析解為

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \frac{x-vt}{2\sqrt{D_L t}} + \exp \frac{vx}{D_L} \operatorname{erfc} \frac{x+vt}{2\sqrt{D_L t}} \right] \quad (13)$$

再由實驗室中砂柱實驗之突破曲線求取 D_L ；因此必須進行兩次實驗，才可以求得 D_L 、 D_T 二參數。

2. 穩定狀態有限源

Yule and Gardner(1978)利用砂箱進行實驗，研究溶質在不飽和多孔體中遷移時 D_L 、 D_T 間之關係，同樣地，採用(11)式，以電腦進行疊代來求取 D_L ，將 D_L 之假設值代入(13)式計算出 $\frac{C}{C_0}$ ，與實測值比較，再調整 D_L 之值，重覆運算及檢驗，在計算值與實測值最為接近時之 D_L 即為所求之橫向流散係數。

在橫向流散係數方面，則採用 Harleman and Rumer(1963)之假設在穩定狀態時忽略縱向流散係數，但給予之邊界條件改為

$$\begin{aligned} C(0, y, t) &= C_0 & |y| < a \\ C(0, y, t) &= 0 & |y| > a \\ C(\infty, t) &= 0 & t \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

其解為

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{a-y}{2\sqrt{D_T t}} + \operatorname{erf} \frac{a+y}{2\sqrt{D_T t}} \right) \quad (15)$$

在 a 趨近於 0 時，

$$C(x, y, t) = C_m \exp\left(-\frac{y^2}{4D_T t}\right) \quad (16)$$

其中 C_m 為 $y=0$ 處之最大濃度值，故可在穩定態時量測 $y=0$ 及任一點 y 之濃度，利用上式求得 D_T 。

3. 穩定狀態之點源

Robbin(1989)以瞬間有限源及連續性點源進行三維流散試驗，在連續性點源之實驗上，採用 Hunt(1978, p.77)所提之理論，溶質由一點以固定速率連續地進入無限延伸的地下水流中，考慮方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (17)$$

其溶質之投注量為

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, 0) dx dy dz \quad (18)$$

在流動之中央線上 ($y=0, z=0$) 之解析解為

$$C = \frac{M}{8x\pi\sqrt{D_y D_z}} \left[\operatorname{erfc} \frac{x-vt}{2\sqrt{D_x t}} + \exp \frac{vx}{D_L} \operatorname{erfc} \frac{x+vt}{2\sqrt{D_x t}} \right] \quad (19)$$

在達穩定狀態時 $x \ll vt$ ，上式括號內之第二項很小可省略，且第一項之值趨近 2，故上式可化簡為

$$C'(x, 0, 0, \infty) = \frac{M}{4x\pi\sqrt{D_y D_z}} \quad (20)$$

將二式合併

$$\frac{C}{C'} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-vt}{2\sqrt{D_x t}} \quad (21)$$

因此可在某 x 點上繪製突破曲線，即可求得縱向流散係數 D_x ，若假設 $D_y = D_z$ ，由(20)式可得

$$D_y = \frac{M}{4\pi C'} \quad (22)$$

由此式可在流動達穩定狀態時，求得橫向流散係數 D_T 。

4. 連續狀態之一般解

Leij and Dane(1990)利用拉氏轉換及傅立葉轉換解二維流散方程式(1)式，求出其解析解。採用之起始及邊界條件為：

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) &= C_i & 0 < x < \infty & \quad -\infty < y < \infty \\ C(0, y, t) &= C_l & y < 0 & \quad t > 0 \\ C(0, y, t) &= C_r & y > 0 & \quad t > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad -\infty < y < \infty \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad t > 0$$

可得解析解為

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi D_L}} \int_0^t u^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(x-vu)^2}{4D_L u}\right] \\ &\quad \left\{ \frac{C_l}{2} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{D_T u}} + \frac{C_r}{2} \operatorname{erfc} \frac{-y}{2\sqrt{D_T u}} \right\} du \\ &\quad - \frac{C_i}{2} \left[\operatorname{erfc} \frac{x-vt}{2\sqrt{D_L t}} + \exp \frac{vx}{D_L} \operatorname{erfc} \frac{x+vt}{2\sqrt{D_L t}} \right] \\ &\quad + C_i \end{aligned} \quad (24)$$

式中 u 為積分假變數(dummy variable)。

若令 $C_i = 0$ 、 $C_r = C_l = C_0$ ，此時之解變為(13)式，即一維之解析解。

若邊界條件為

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) &= 0 & 0 < x < \infty & \quad -\infty < y < \infty \\ C(0, y, t) &= C_0 & y < 0 & \quad t > 0 \\ C(0, y, t) &= 0 & y > 0 & \quad t > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad -\infty < y < \infty \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad t > 0$$

此時與Harleman and Rumer(1963)之邊界條件相似，解為

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{C_0 x}{4\sqrt{\pi D_L}} \int_0^t u^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(x-vu)^2}{4D_L u}\right] \\ &\quad \left\{ \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{D_T u}} \right\} du \end{aligned} \quad (26)$$

當時間增加時，則此式趨近於Harleman and Rumer之解(10)式。

若將邊界條件改為

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) &= 0 & 0 < x < \infty & \quad -\infty < y < \infty \\ C(0, y, t) &= C_0 & |y| < a & \quad t > 0 \\ C(0, y, t) &= 0 & |y| > a & \quad t > 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad -\infty < y < \infty \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad t > 0$$

此與Yule and Gardner(1978)之邊界

條件相似，解析解為

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 x}{4\sqrt{\pi D_L}} \int_0^t u^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(x-vu)^2}{4D_L u}\right] \left\{ \operatorname{erf} \frac{a-y}{2\sqrt{D_T u}} + \operatorname{erf} \frac{a+y}{2\sqrt{D_T u}} \right\} du \quad (28)$$

當時間延續很長，則會趨近於 Yule and Gardner(1978)之解(15)式。

(26)式及(28)式較(10)式及(15)式更為普遍性，因其考慮了在溶質流動未達穩定時，土壤剖面之濃度隨時間變化之情形，其適用範圍更為寬廣。但 Leij and Dane(1990)並未進行試驗，僅推論由一次實驗可以同時決定 D_L 及 D_T 。在位置 $x=L$ 處之不同 y 點，量測繪製突破曲線，在穩定狀態時，由式(10)，即可求得 D_T ，然後將 D_T 代入(26)式，經由疊代過程尋找即可求得 D_L 。

綜合前面所述，在二維流散的研究中於時間上多數都只考慮瞬間源或連續性源達穩定狀態，在這兩種狀況下方程式(1)之解析解都可簡化至最簡單，瞬間源為與機率密度函數相同之指數型式，穩定狀態之解為誤差函數之型式。只有少數之解表達了連續性源任意時間之濃度剖面，在此以 Leij and Dane(1990)之解最具代表性。

然而在求取流散係數 D_L 、 D_T 上，均需經由兩道步驟，分別求取 D_L 或

D_T 。以一維之突破曲線，利用數值疊代法進行參數檢定或在解析解中查表計算，來求取 D_L 。 D_T 之求取均需利用長時間達穩定狀態時之解析近似解來求取 D_T ，即使是 Leij and Dane(1990)之一般性公式，雖可在一次試驗中同時應用解析法及疊代法求取 D_L 、 D_T ，但仍須耗費時間始達穩定狀態始可求得 D_T 。

但何時才到達穩定狀態呢？每一種多孔體之性質不盡相同，到達穩定態的時間並不一致，因此無法以一多孔體到達穩定態的時間斷言其他多孔體亦是如此。同時量測濃度值繪製突破曲線時，雖然可由測到兩相鄰數值間的相對變化量或量測與解析解之比較來判斷，例如量測到相對濃值達0.95，或相鄰之變化量為0.05，即可視為穩定，但一來尚無規範以多大之值，作為達穩定狀態之判定；二來仍須耗費相當長之時間。

曹舜評、萬鑫森(1994)沿用 Leij and Dane(1990)所用之方法，解 Harleman and Rumer(1963)之邊界條件時，同樣得到(26)式，進一步的推算相對濃度對時間之斜率得

$$S_{i,y} = \frac{x}{4\sqrt{\pi D_L t^3}} \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{4D_L t}\right] \left\{ \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{D_T t}} \right\} \quad (29)$$

在 $y=0$ 處，即半平面源與無溶質區

交界處，(26)式可化爲

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{4} \left[\operatorname{erfc} \frac{x-vt}{2\sqrt{D_L t}} + \exp \frac{vx}{D_L} \operatorname{erfc} \frac{x+vt}{2\sqrt{D_L t}} \right] \quad (30)$$

此時相對濃度對時間之斜率爲

$$S_{t_0} = \frac{x}{4\sqrt{\pi D_L t^3}} \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{4D_L t} \right] \quad (31)$$

且

$$S_{t_y} = S_{t_0} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{D_T t}} \quad (32)$$

實驗時可由 $x=L$ ， $y=0$ 及任一點 y 處量測繪製突破曲線，在某一時間 t 時，由二曲線之斜率比，再查閱誤差函數表，即可求出 D_T 。

$$D_T = \frac{y^2}{4t(\operatorname{erfc}^{-1} \frac{S_{t_y}}{S_{t_0}})^2} \quad (33)$$

D_L 之求取，可在 $L=vt$ 、 $\frac{C}{C_0} \approx \frac{1}{4}$ 時得

$$D_L = \frac{L^2}{16\pi S_{t_0}^2 t^3} \quad (34)$$

因此利用此方法，至少須二不同 y 點之 $\frac{C}{C_0}-t$ 曲線圖形，而其中一點須爲 $y=0$ 。在理論上利用此方法，不只可由一次實驗求得二參數 D_L 、 D_T ，而且不必等到穩定狀態，是以較前述之各種方法方便。

研究方法

1. 試驗方法

試驗裝置爲一長立方體之壓克力容器，如圖1，內部尺寸長21公分，寬9公分，高18公分，在 21×18 平方公分之兩側面中央下方鑽一內徑1.2公分之小孔，圓孔中心距底邊3公分，再往兩側各鑽3個相同之孔共計7個圓孔，每個圓孔中心相距3公分。頂蓋內置兩片 10×9 平方公分之多孔板，二板之間以0.5公分寬之壓力克分隔。取七根內徑0.6公分外徑1.1公分長10公分之多孔管，兩端套接頭，架置於容器兩側之圓孔上。

試驗前之處理：將石英極細砂（小於140號篩，砂粒占92.4%，粉粒7.6%），經0.1 M之稀鹽酸浸泡一星期，並每日攪拌數次，一星期後，以蒸餾水清洗並浸泡一星期，每日更換蒸餾水，處理後風乾備用。此處理之目的在於使石英砂內部之離子降至最低，以達到多孔體內部初始濃度爲零之條件。在本研究中，處理前 K^+ 之含量爲6 ppm，處理後爲0.5 ppm。

試驗時，將石英極細砂，每次取10克平均灑於容器內，並以木棒輕敲，以造成均質多孔體之條件。填好後由底部七根多孔管逆向飽和，飽和後加蓋。隨後由頂端一二多孔板之一邊，連續性加

入1000 ppm之KCl為追蹤溶質，另一邊以蒸餾水輸入。兩定水頭位置與頂蓋多孔板同高，底部七根多孔管一端之接頭經橡皮管連接定量收集器，另一端封閉。溶液進入與流出容器之高度差為15公分，即單位梯度之條件。定量收集器

上裝置多管收集架，使溶液可同時由七管流出，設定固定時間由試管收集流出液，本研究以20分鐘為設定收集一管之時間記錄每支試管流出液之重量，並測定每管之鉀離子濃度。

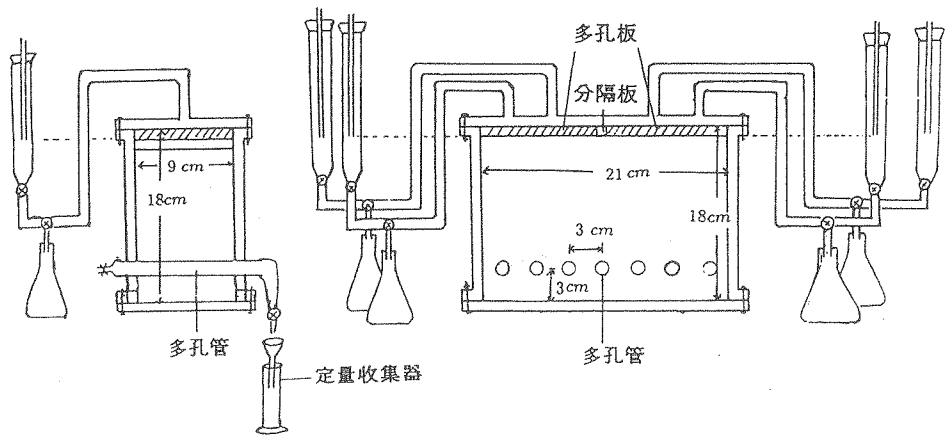


圖1、試驗裝置

2. 數值模擬

在已知二維對流流散方程式的三參數 D_L 、 D_T 、 v 時，可利用數值方法來模擬多孔體中不同時間之濃度剖面，在本研究中數值方法採有限差分法 (Finite Difference Method)，對時間取後向差分，在空間上取中央差分，由於差分法是將時間及空間分段，再將起始及邊界條件代入，因此會產生複雜之運算矩陣，為了簡化運算過程及節省電腦記憶體空間，採用交錯方向內隱法，即A.D.I

法 (Alternating direction scheme)。此法將平面的運算簡化為一維之運算，如此可將運算矩陣轉化為三角矩陣，但須由兩次運算方可組合成為一整體運算。第一次運算為在區間之起點，假設 x 方向之量為已知，僅計算 y 方向之未知量，可將(1)式之偏微分方程改寫為

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} = D_L \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

$$-v \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + D_T \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (35)$$

此式所產生之偏差，可由下一時間段中反順序之二階導數近似值予以平衡，即在第二次運算中假設y方向之量為已知，僅計算x方向之未知量，將式(1)寫為

$$\frac{C_{i,j}^{n+2} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} = D_L \frac{C_{i+1,j}^{n+2} - 2C_{i,j}^{n+2} + C_{i-1,j}^{n+2}}{\Delta x^2} - v \frac{C_{i+1,j}^{n+2} - C_{i-1,j}^{n+2}}{2\Delta x} + D_T \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (36)$$

在本研究中，將解析解(26)式及ADI數值模擬(35)(36)式，撰寫成Fortran電腦程式，為檢驗程式之適用性，利用Leij and Dane(1990)中所假設之數據 $D_L=25\text{cm}^2/\text{day}$ ， $D_T=5\text{cm}^2/\text{day}$ ， $v=50\text{cm}/\text{day}$ 。選擇 $x=50\text{cm}$ ， $y=-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\text{cm}$ 處，同時以解析解及數值模擬計算出不同時間之濃度並繪成圖2之突破曲線，其中數值模擬之 Δx 、 Δy 、 Δt 分別為 1cm 、 0.25cm 、 10min 。由圖上可見在高濃度區即 $y=-9\text{cm}$ 、 -6cm 處數值與解析解一致，在其他位置最終穩定態之濃度，數值略高於解析解。

圖3 至圖5 為此例中，數值解在不同 Δx 、 Δy 、 Δt 時對曲線之影響，實線部分為圖2 之數值解。

圖3 為在 $x=50\text{cm}$ 、 $y=-9, -3, 0\text{cm}$ 處， $\Delta x=1\text{cm}$ 、 $\Delta y=0.25\text{cm}$ ，取不同 Δt 之曲線，當 $\Delta t < 10\text{min}$ 時，所得之曲線具一致性，而在 $\Delta t=60\text{min}$ 時，很明顯看出有數值振盪及擴散之現象。

圖4 為在 $x=50\text{cm}$ 、 $y=-9, -3, 0\text{cm}$ 處， $\Delta y=0.25\text{cm}$ 、 $\Delta t=10\text{min}$ ，取不同 Δx 時之曲線，由圖上可見 Δx 取太大的話將導致數值擴散， Δx 愈小則濃度剖面會往左移動。

圖5 為在 $x=50\text{cm}$ 、 $y=-9, -3, 0\text{cm}$ 處， $\Delta x=1\text{cm}$ 、 $\Delta t=10\text{min}$ ，取不同 Δy 時之曲線。在高濃度區 $y=-9\text{cm}$ ， Δy 之選定並不影響突破曲線之圖形，在 $y=-3, 0\text{cm}$ 處，過大或過小之 Δy 值將會使數值最終之收斂值遠離正確之解，在 $y=0$ 時最終之值應在 0.5 。

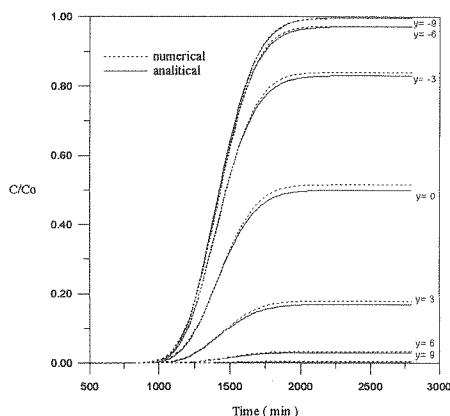


圖2、以 Leij and Dane 所設數據解析解與數值解之比較

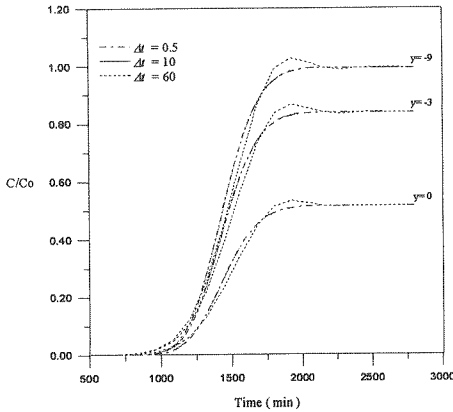


圖 3、以 Leij and Dane 所設數據，取不同 Δt 在不同 y 處數值解之比較

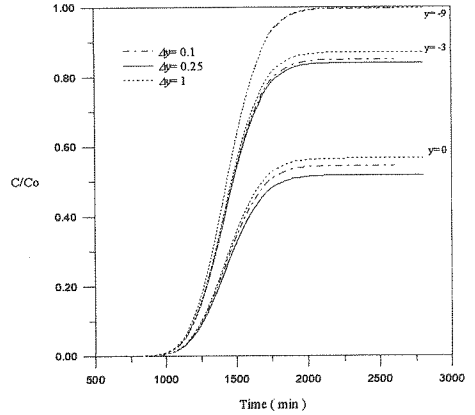


圖 5、以 Leij and Dane 所設數據，取不同 Δy 在不同 y 處數值解之比較

結果與討論

本研究所設計之試驗合乎 Harleman and Rumer(1963) 之邊界條件，即以連續性半平面源作為起始及邊界條件。由試管所收集之流出液，測定每管之鉀離子濃度，並繪製不同 y 點之相對濃度-時間曲線圖。共進行兩次實驗。

在求取 D_L 、 D_T 方面，利用兩種方法求得

方法一：利用(33)、(34)式之斜率計算。

由 $y=0$ 之突破曲線，取 $\frac{C}{C_0} = \frac{1}{4}$ 處所

對應之 t 值，以 $v = \frac{L}{t}$ 求取平均孔隙流速 v ；並在該時間由 $y=0$ 及不同 y 點所繪得的突破曲線上，取得斜率 S_{t_0} 、 S_{t_y} 。

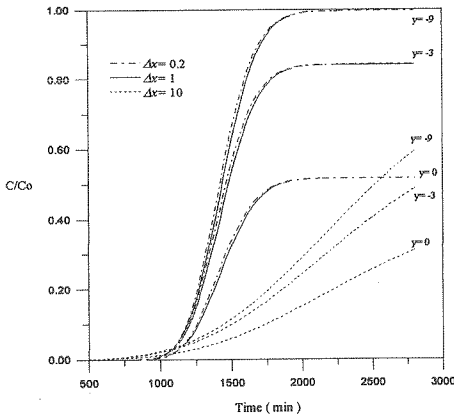


圖 4、以 Leij and Dane 所設數據，取不同 Δx 在不同 y 處數值解之比較

將 t 、 S_{t_0} 代入(34)式，可求得 D_L ；以(33)式經由誤差函數表求出不同 y 點之 D_T ，取其平均值。

方法二：以最小平方方法進行參數檢定：

先假設 v 、 D_L 、 D_T 之值代入(26)式中，求出不同時間之 $\frac{C}{C_0}$ 值，同時以最小平方方法計算實驗值與計算值之間誤差之平方和，再以疊代法更動 v 、 D_L 、 D_T 之值，直到誤差平方和最小時為止，即得所需之值。

兩次試驗利用兩種方法所求出之 D_L 、 D_T 、 v 如表1。

最後將兩種方法求得之 v 、 D_L 、 D_T

三參數，重新代回(26)式、(35)式及(36)式利用解析解及數值來模擬濃度隨時間及位置變化之情形。

圖6為試驗一用兩種方法求取 D_L 、 D_T 後代入解析解，模擬流出孔之突破曲線與實測值之比較。所取之位置在 $x=15\text{cm}$ ， $y=-9\text{cm}$ ， -3cm ， 0cm 處。實測值在 $t=900$ 分時 $y=-9$ ， -3 ， 0cm 處均有跳躍現象，時間在 $t=1100$ 分左右處，實測值有明顯的突躍現象，目前推測其原因為溫度控制不當所致。兩種方法在 $y=0$ 處之前半段具有一致性，在末段則由於實測值之突躍而不一致。 $y=-9$ ， -3cm 處之模擬曲線與實測值具有相似之傾向，

表1、兩次試驗利用兩種方法所得之三參數

		v (cm/min)	D_L (cm ² /min)	D_T (cm ² /min)	D_T/D_L
試驗一	方法一	1.57×10^{-2}	3.30×10^{-3}	8.56×10^{-3}	2.59
	方法二	1.59×10^{-2}	1.23×10^{-3}	3.64×10^{-3}	2.96
試驗二	方法一	1.76×10^{-2}	2.77×10^{-4}	3.32×10^{-2}	1.20×10^2
	方法二	1.75×10^{-2}	1.55×10^{-4}	2.60×10^{-2}	1.67×10^2

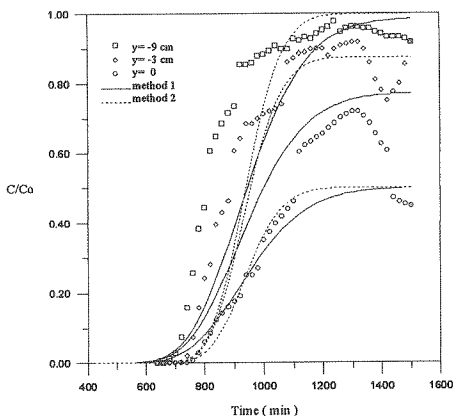


圖 6、試驗一以兩種方法所得參數代入解析解與實測值之比較

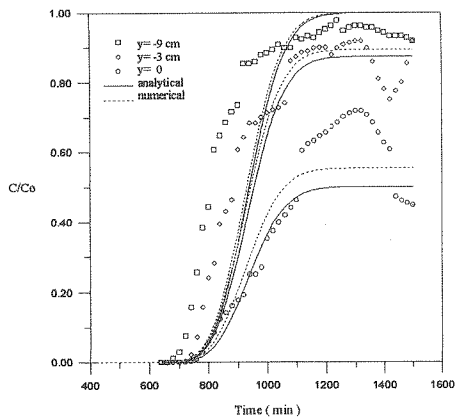


圖 8、試驗一以最小平方方法所得參數代入解析解、數值解與實測值之比較

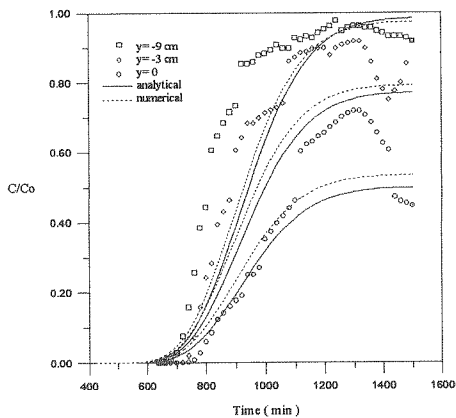


圖 7、試驗一以斜率計算所得參數代入解析解、數值解與實測值之比較

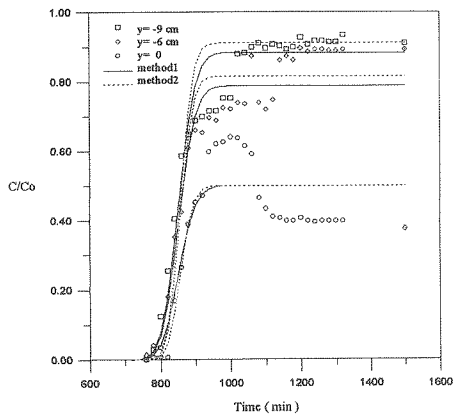


圖 9、試驗二以兩種方法所得參數代入解析解與實測值之比較

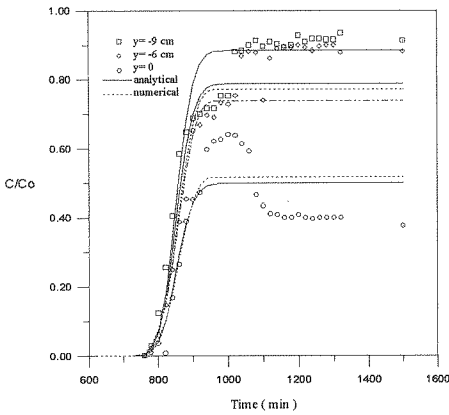


圖 10、試驗二以斜率計算所得參數代入解析解、數值解與實測值之比較

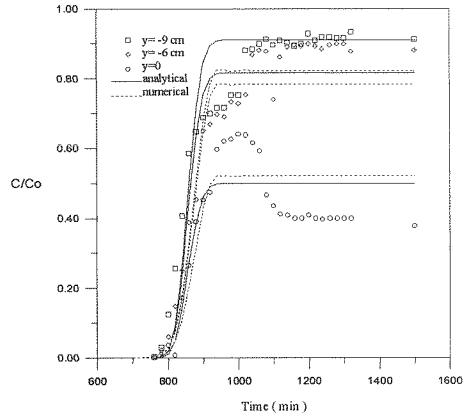


圖 11、試驗二以最小平方方法所得參數代入解析解、數值解與實測值之比較

但很明顯地曲線向右偏移，亦即延後到達。圖7、圖8為試驗一分別用兩種方法所進行之解析模擬與數值模擬之比較，除了數值解曲線較高外，二種模擬並未有太大之差異。

圖9為試驗二之實測值與兩種方法之解析解比較之情況，所取位置為 $x=15\text{cm}$ ， $y = -9, -6, 0\text{cm}$ ，此次試驗由於改善了試驗一之一些小缺失，因此在三個 y 處之模擬與實測值之符合上較試驗一更佳，但實測值仍有跳躍現象。在 $y = -6\text{cm}$ 處濃度達穩定態時實值較預測值高，而 $y = 0$ 處則相反。圖10、圖11為試驗二兩種方法之解析模擬與數值模擬之比較。

本研究同時以兩種方法求取 D_L 、 D_T ，在求解過程中，發現若用方法一，

以餘誤差表來求取數值時，需注意到誤差函數之定義域與值域之差異，因為在 $y = \text{erf } x$ 或 $y = \text{erfc } x$ 兩函數中， x 之範圍可在正負無限大之間，而 y 之範圍分別在 $+1 \sim -1$ 或 $0 \sim 2$ 之間，若由 y 反向推求 x 時， y 落在兩極端值附近時，則將引起 x 甚大之誤差。例如：

$$\begin{aligned} x=2.8 \quad \text{erf } x &= 0.9999 \quad \text{erfc } x = 0.0001 \\ x=2.0 \quad \text{erf } x &= 0.9953 \quad \text{erfc } x = 0.0047 \end{aligned}$$

在誤差函數上只差異0.0046，而 x 已相差0.8，0.0046的差異在實驗上並不易查覺，因此方法一之限制，有待進一步之研究。

同樣地，利用方法二進行參數取得時，將假設之參數值，代入二維流散方程式中，以數值方法求取適當之參數

時， Δx 、 Δy 、 Δt 的大小選取會影響到參數的選定，因此，以此方法所得之參數之可靠性亦值得懷疑。前述之問題皆有待進一步之研究。

結 論

本研究首先回顧有關二維流散係數之研究，歸納出一般求取流散係數方法，多半以二次試驗分別求取 D_L 及 D_T ，惟有 Leij and Dane(1990)，曹舜評、萬鑫森(1994)推出一次實驗即可求得參數。除了曹舜評、萬鑫森之推求不需達穩定態外，其餘皆須包含流動達穩定態之條件下始可求取 D_L 、 D_T 。

本研究同時利用曹舜評、萬鑫森所提之理論進行實驗，在特定時刻 $t=L/v$ ，求取 D_L 、 D_T ，並另以數值疊代方法，利用最小平方法求取 v 、 D_L 、 D_T 之值，所得之結果代回二維流散方程式，同時以解析解及數值方法模擬流出孔之突破曲線，再與實測值比較，其圖形具有一致之傾向，但實測值有突躍之現象，其原因應為溫度控制不當所引起，此處有待進一步之研究。

參考文獻

1. 曹舜評、萬鑫森。1994。二維無反應多孔體橫向流散係數之研究。國立中興大學水土保持學報。26:27-37。
2. Crank, J. 1975. *The Mathematics of diffusion*. Clarendon. Oxford.
3. Cussler, E. L. 1984. *Diffusion, mass transfer in fluid systems*. Cambridge University. New York.
4. Fried, J. J., and M. A. Combarous. 1971. Dispersion in porous media. *Advances in Hydroscience*. 7:169-283.
5. Grane, F. E., and G. H. F. Gardner. 1961. Measurements of transverse dispersion in granular media. *J. Chem. Eng.* 6:283-287.
6. Han, N. -W., J. Bhakta, and R. G. Carbonell. 1985. Longitudinal and lateral dispersion in packed beds: Effect of column length and particle size distribution. *AICHE J.* 31:277-288.
7. Harleman, D. R. F., and R. R. Rumer. 1963. Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous medium. *J. Fluid Mech.* 16:385-394.
8. Hunt, B. 1978. Dispersive sources in uniform ground-water flow. *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.* 104(HY1):75-85.
9. Lai, S. H., and J. J. Jurinak. 1971. Numerical Approximation of cation

- exchange in miscible displacement through soil columns. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 35:894-899.
10. Lai, S. H., and J. J. Jurinak. 1972. Cation adsorption in one-dimensional low through soils: a numerical solution. *Water Resour. Res.* 8:99-107.
 11. Leij, F. J., and J. H. Dane. 1990. Analytical solutions of the one-dimensional advection equation and two- or three- dimensional dispersion equation. *Water Resour. Res.* 26:1475-1482.
 12. Nielsen, D. R., and J. W. Biggar. 1962. Miscible displacement in soils : 3. Theoretical consideration. *Soil Soc. Sci. Am. Proc.* 26:216-221.
 13. Robbins, G. A. 1989. Methods for determining transverse dispersion coefficients of porous media in laboratory column experiments. *Water Resour. Res.* 25:1249-1258.
 14. van Genuchten, M. Th., and P. J. Wierenga. 1986. Solute dispersion coefficients and retardation factors. in : A. Klute. *Methods of Soil Analysis PART 1:Physical and Mineralogical Methods.* P.1025- 1054. 2nd Edition.
 15. Wann, S. S. 1977. Prediction of solute dispersion in soils. *J. Soil & Water Conserv.* 8(1):58-65.
 16. Yule, D. F., and W. R. Gardner. 1978. Longitudinal and transverse dispersion coefficients in unsaturated plainfield sand. *Water Resour. Res.* 14:582-588.

A Study on Solute Dispersion in Two Dimensional Porous Media

Shun-Ping Tsao⁽¹⁾ *Shing-Sun Wann*⁽²⁾

ABSTRACT

Solute dispersion in two dimensional porous media needs two important parameters, longitudinal and transversal dispersion coefficients, D_L and, D_T which require two separate experiments, and also must meet the conditions in steady state. This study is to investigate these two parameters simultaneously and in the unsteady state conditions by using mathematical treatments.

Experiments carried out in a box of fine quartz sands in which several parallel porous tubes were inserted to collect the effluent solutions. Potassium ion, K^+ , was used as the tracer. The results agree fairly well to the analytical and numerical solutions of the physical model of dispersion:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

subject to the initial and boundary conditions

$$C(x, y, 0) = 0 \quad 0 < x < \infty \quad -\infty < y < \infty$$

$$C(0, y, t) = C_0 \quad y < 0 \quad t > 0$$

$$C(0, y, t) = 0 \quad y > 0 \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad -\infty < y < \infty \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \pm \infty} = 0 \quad 0 < x < \infty \quad t > 0$$

where

$$D_L = \frac{L^2}{16 \pi S_{t_0}^2 t^3} \quad , \quad D_T = \frac{y^2}{4 t (\operatorname{erfc}^{-1} \frac{S_{ty}}{S_{t_0}})^2}$$

Keywords : solute transport, two dimension dispersion, transversal coefficient, porous media.

(1) Graduate Student, Department of Soil and Water Conservation, National Chung Hsing University, Taiwan, R. O. C.

(2) Professor, Department of Soil and Water Conservation, National Chung Hsing University, Taiwan, R. O. C.

以地表移動變量預測地滑破壞時刻之研究

李正義⁽¹⁾ 許中立⁽²⁾

摘要

由於邊坡之滑動崩壞時會釀成人員、設施以及財物的鉅大損失，或為局部的邊坡滑動崩壞而引發更大之災害，故若能預測邊坡何時發生破壞，應可爭取較充裕的準備時間與從容的因應對策，可使損害減至最低程度。

本文乃以明潭水庫集水區地滑地之四組伸縮計監測資料加以分析，並應用材料潛變破壞模式以及定常應變與破壞關係等，予以檢算後進行比較分析並作必要之修正，以為進一步應用及發展邊坡崩壞時刻預測模式之參考。

關鍵詞：地表移動變量、地滑、潛變破壞、破壞時刻

前言

在許多發生地滑之災害實例中，有的邊坡會在急速地流動後即發生崩塌，但有的則會持續而緩慢地移動且不引發大規模的崩塌現象，由此可見地滑地的活動狀況不盡相同。雖然引起崩壞的環境因素甚多且互異，但似可應用其崩壞過程與時間的關係特性再予以探究。

對於絕大部份之材料而言，若持續地施予一超過臨界之尖峰應力時，則其潛變 (creep) 速率將會有加速的變化，而在經過一段時間後既發生破壞斷裂的現象，如此不但可得到材料的潛變過程與其破壞時刻相互間的關係，更可作為預測材料受力破壞時刻的依據，且更進一步地可將此種預測模式應用於邊坡崩壞的預測工作上。^(1,2)

一般所謂邊坡崩壞的預測，通常係指對某一特定之自然或人工之坡面進行預估

(1) 國立中興大學水土保持學系副教授

(2) 國立中興大學水土保持學研究所研究生

其抵抗破壞之安全度而言的。亦即是對特定的區域內，依據力學之平衡原理分析其是否安全的方法。當分析的結果發現邊坡無法繼續維持其內部強度與外力作用間的平衡關係時，則可判定其屬於潛在危險的邊坡。但是對於邊坡內部強度變化的監測常不易進行，且所需的經費與人力亦較多，同時由於地層滑動所引起邊坡內部的崩壞現象最終均會反應於地面的移動變化上，因此在可能發生邊坡滑動崩壞的潛在地區設置地表移動量監測儀器（如本文的伸縮計之類），實有助於對邊坡穩定性的瞭解與崩壞預測模式之發展。

理論分析

以移動變量來預測邊坡崩壞時刻的方法，起初則是由日本齊藤氏(SAITO, 1966)所提出的，至今已經歷將近三十年的時間，但迄今仍被公認為最有效的預測方式之一。(3)

依據一般材料科學對物質潛變過程中潛變速度的闡釋，可以下列的微分式表示之(4,5)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a_1 e^{-ct} + a_2 + a_3 t^n \dots\dots\dots(1)$$

其中：ε 為應變

t：為時間

a₁, a₂, a₃, c, n: 均為實驗常數

若假設起始條件t=0、ε=0，則(1)式經積分後所得到的應變與時間之關係式（亦即潛變曲線式）可表示成

$$\varepsilon = \frac{a_1}{c} (1 - e^{-ct}) + a_2 t + \frac{a_3}{n+1} t^{n+1} = A_1 (1 - e^{-ct}) + A_2 t + A_3 t^a \dots\dots\dots(2)$$

其中A₁, A₂, A₃, a：均為實驗常數

同時為表示當增加荷重後所產生之瞬時變形，乃在(2)式中再另外加入與時間無關之一項A，如此則由變形開始至破壞為止，整個材料的潛變過程即可以下列之應變與時間關係式來加以描述

$$\varepsilon = A_0 + A_1 (1 - e^{-ct}) + A_2 t + A_3 t^a \dots\dots\dots(3)$$

上式可解釋為具有一次潛變（減速潛變）、二次潛變（穩定潛變）與三次潛變（破壞潛變）等三段式的潛變行為歷程。在(3)式等號右側之第一項與第二項分別表示為瞬間之變形與一次之潛變項，而第三項為二次之潛變項，第四項為三次之潛變項示如圖1。

根據材料試驗之觀點，若於試驗土塊材料上增加超過某一定值之荷載（約為破壞強度之30%）而靜置不動後，經過一段相當時間該試體即告破壞，此種由開始負載至最終破壞為止所經過之時間即為「潛變破壞時刻」(time of creep failure)。為了能夠準確地預測此一破壞時刻，多位學者一直在從事這方面的研究，惟所得之成果不多。如村山、柴田以實驗資料分析求得材料破壞時刻與作用應力之間的關係為

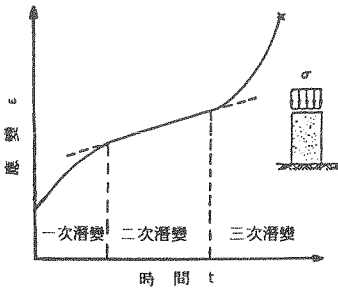


圖1、材料潛變現象中應變與時間關係示意圖

$$\log t_f = a(\sigma_1 - \sigma_2) + b \quad (4)$$

式中 t_f : 為破壞時刻
 $\sigma_1 - \sigma_2$: 為作用應力
 a, b : 均為常數

而齊藤更以許多實驗數據, 導出定常應變速率與破壞時刻之關係如圖 2 所示, 其關係式如下, (6,7)

$$\log t_f = 2.33 - 0.916 \log(\varepsilon \times 10^4) \pm 0.59 \dots (5)$$

式中 t_f : 為破壞時刻
 ε : 為應變速率

此即應用潛變破壞過程中之二次潛變段的應變速率常為一定值之特性而推導出的, 若將(5) 式予以一般化, 則可改寫成

$$\log t_f = C - k \times \log \varepsilon \quad (6)$$

式中 t_f : 為破壞時刻
 ε : 為應變速率

C, k : 均為實驗常數

因 $k = 0.916 \approx 1$, 若代入上式後可求出

$$C = \varepsilon \times t_f \quad (7)$$

故於任意時刻的應變速率可表示為

$$\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C}{t_f - t} \quad (8)$$

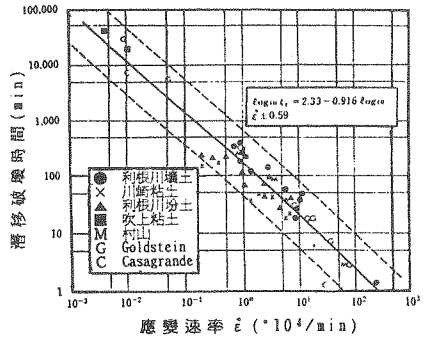


圖2、齊藤氏之潛變破壞時間與二次應變速率關係圖

倘若將上式予以積分, 且設當 $t = t_0$ 時之 $\varepsilon = 0$, 則可得

$$\varepsilon = A \times \log \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right) \quad (9)$$

又因應變可表示成 $\varepsilon = l/L$ (l : 為移動變量, L : 為基準長度), 則

$$l = L \times A \times \log \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right) \quad (10)$$

在上式中因尚有 L, A, t_f, t_0 等均為待定未知數, 故若將所測得之潛變曲線資料任選數點代入時, 即可求得某時刻開始至破壞發生為止的時間。一般當選取潛變曲線上應變間隔相等之三個點資料代入計算時, 即可得以下之簡單關係式

$$\frac{t_f - t_2}{t_f - t_3} = \frac{t_f - t_1}{t_f - t_2} \quad (11)$$

亦即

$$t_f - t_1 = \frac{\frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2}{(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}(t_2 - t_1)} \quad (12)$$

以上之方法更可利用圖解法方式近似而且快速地求出一般材料之破壞時間，如圖 3 所示。然而由於滑動邊坡發生的地表移動歷程與以往學者所提出之材料潛變破壞預測模式有著類似的情形，因此齊藤、福囿輝旗、申潤植⁽⁸⁾等人均提出以上述之模式來預測邊坡崩壞時刻，此即至目前為止對邊坡穩定問題最為有效的預測方式之一。

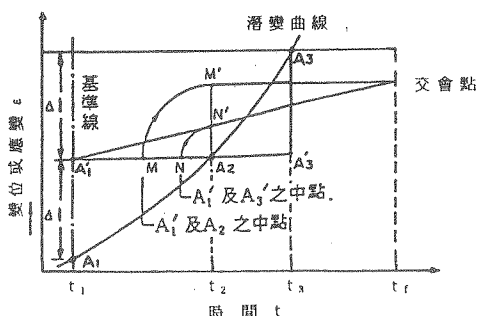


圖3、潛變破壞預測之圖式解法(破壞預測法)

研究方法

由於以往國內對邊坡崩壞時刻預測之研究較少提出，而主要的理論依據均為日本之學者所提出者，然而為探究地滑地邊坡是否具有以往日本學者所提出之地表移動特性，同時進一步對邊坡滑動崩壞時刻予以預測，遂參照以往之研究成果以及理論，以南投明潭水庫集水區地滑地之地表移動監測資料作為驗證。⁽⁹⁾

明潭水庫集水區地滑地係位於南投縣水里鄉，距離明潭抽蓄發電水庫大壩右側約五百公尺處。由於引入日月潭（上池）水發電之故，使得下池之每日水庫貯水位升降落差高達十餘公尺以上，因此集水區內的邊坡常有地層滑動災害之發生。

本文遂將於此地滑地內所裝置之四組自動式地表移動量監測儀器（伸縮計 extensometer），自民國八十二年九月份至民國八十三年八月份間的監測所得資料加以整理計算，並進行以下之分析工作：首先，比較各組伸縮計所量測的應變量與時間之關係，並依三段式的潛變模式來分段描述邊坡滑動崩壞的歷程，以探求本地滑地之潛移趨勢，作為進一步應用材料潛變模式分析預測之依據；其次，再根據齊藤之二次穩定應變速率潛變崩壞預測模式理論與經驗，就明潭地滑地之不同區塊監測所得結果計算比較，以驗證該模式應用於本地滑地之崩壞預測效果，進而求得適用於本地滑地或台灣地區其他地滑地之邊坡崩壞時刻預測的模式；最後，再以分段曲線擬合與最小平方方法⁽¹⁰⁾求出較合理之三次邊坡崩壞時刻曲線式，以供為評估滑動邊坡崩壞過程之參考。

結果與討論

根據明潭水庫集水區地滑地安置之四組地表移動量儀之監測資料顯示，其監測時間與應變量的關係確有類似材料之三段

式潛變崩壞情形,如圖 4至圖 7所示,但在邊坡發生劇烈或大規模滑移之前,會出現地表移動情形變得較為緩和或呈現斷續地滑移的狀況。此外,由圖中可看出雖然四組資料均屬為同一地區的地表滑移變化,但SL-1與SL-3的應變歷線卻較為接近,且與SL-2以及SL-4間有所區別,究其原因乃是由於明潭地滑地之地層滑移屬於複合型滑動,具有二個滑動面存在,而監測設置時因SL-1與SL-3均設於各段滑動區的頭部,故檢測出的應變歷線較為類似。相反地,SL-2與SL-4因設於各段滑動區的趾部,因受伸張與壓縮的交替作用,故應變歷線呈現不穩定變化的情形,造成判釋分析的不易,其中尤以SL-4之設置時間較晚(約67天),更難對其間作比較。

若參照各組監測儀器設置之時間前後關係,以及應變歷線圖中地表劇烈滑移的時間等,再應用齊藤氏潛變崩壞預測式計算邊坡發生崩壞的時刻,則可得知預測與實際崩壞時刻之差平均為91.8天,而除了

SL-2與SL-3二組預測結果尚屬在95%之信賴區(confidence interval)之外,其餘二組之預測結果與實際情形相差甚遠,如表1所示,顯見就本文所驗證之明潭水庫地滑地地表滑移變化資料言,齊藤氏之預測模式尚有修正之必要。

而基於作為檢驗之可靠資料有限,故本文仍採用上述四組中之穩定的二次潛變應變率與實際邊坡滑移崩壞時刻等資料予以統計分析,得到明潭水庫地滑地之邊坡滑移崩壞時刻預估式如下,

$$\log t_i = 3.191 - 0.486 \log(\varepsilon \times 10^4)$$

其 r^2 值為0.8488,95%信賴限界值為0.2874。若再與齊藤氏之預估式比較,則本推估式之預估值略為偏高。而當穩定應變率小於0.002時,則本推估式之預估值與齊藤氏之預估式結果頗為接近,如圖8所示。

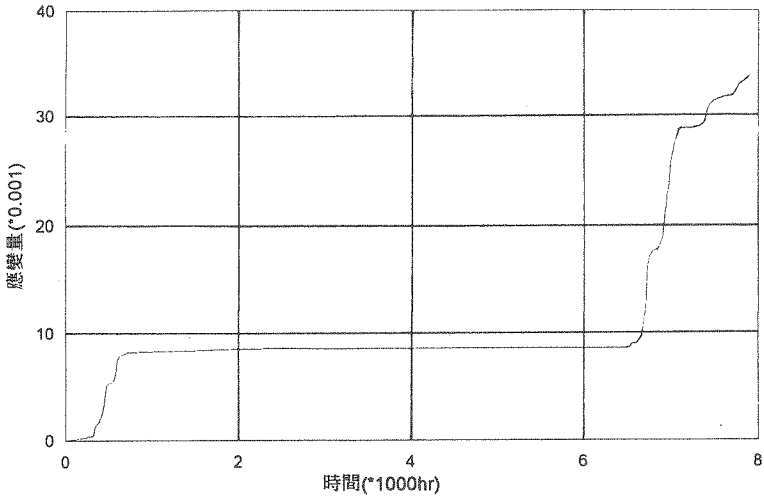


圖4、明潭水庫地滑地地SL-1號伸縮計地表移動監測結果

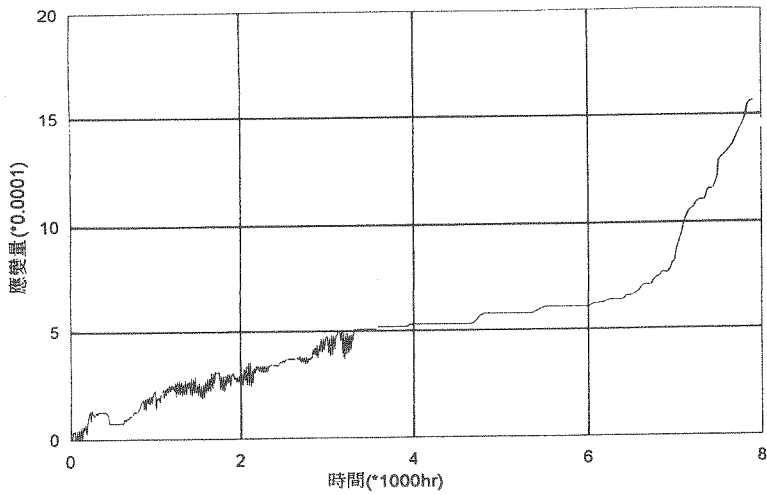


圖5、明潭水庫地滑地地SL-2號伸縮計地表移動監測結果

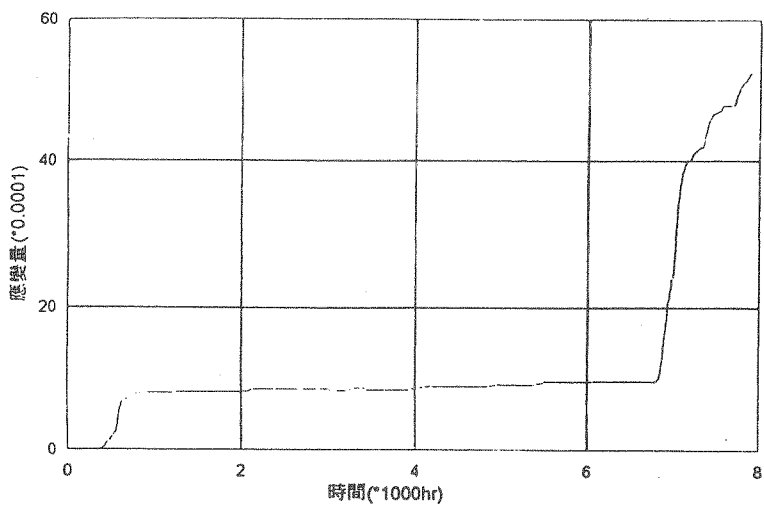


圖6、明潭水庫地滑地地SL-3號伸縮計地表移動監測結果

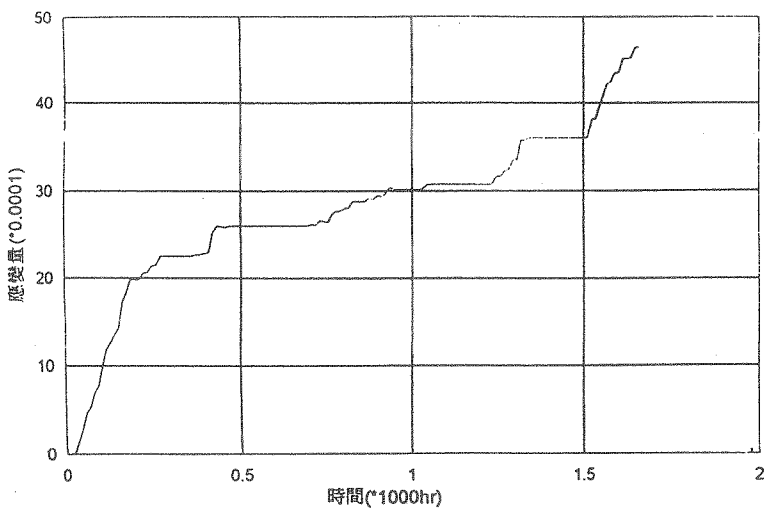


圖7、明潭水庫地滑地地SL-4號伸縮計地表移動監測結果

表 1 齊藤氏潛變崩壞預測式檢算成果

伸縮計 編號	二次潛變 應變率	實際崩壞時刻	預測崩壞時刻	預測崩壞時刻	
				95%信賴上限	95%信賴下限
SL-1	2.3E-9	424080min (294.5day)	181977.96min (126.37day)	328286.13min (227.98day)	100875.35min (70.05day)
SL-2	8.0E-10	450780min (313.0day)	466502.08min (323.96day)	841564.35min (584.42day)	258594.83min (179.58day)
SL-3	6.0E-10	428400min (297.5day)	637356.90min (442.61day)	1149784.5min (798.46day)	353304.32min (245.35day)
SL-4	1.43E-8	95760min (66.5day)	34105.84min (23.68day)	61526.54min (42.73day)	18905.80min (13.13day)

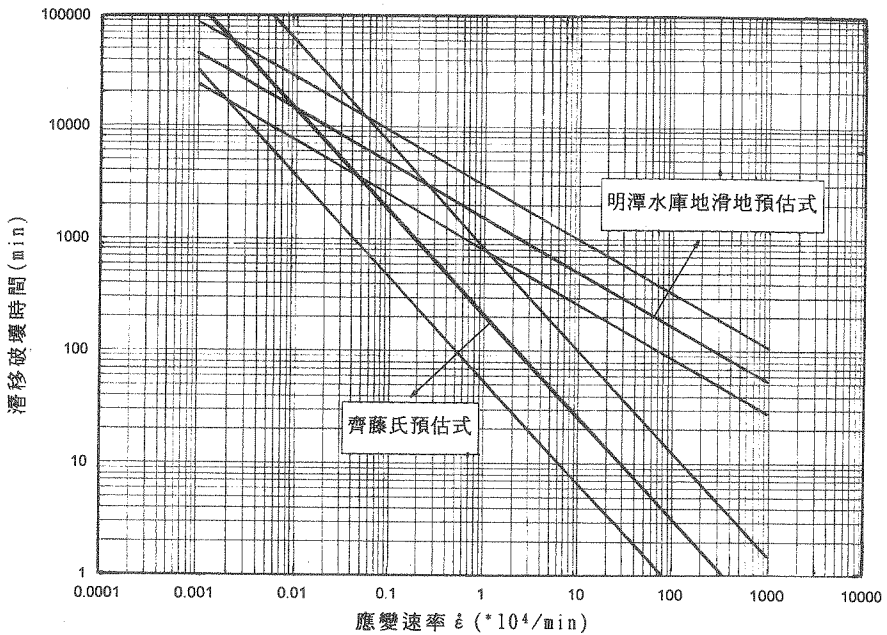


圖8、明潭水庫地滑地地表潛移破壞時間預估值結果

表 2 潛變曲線各段參數統計分析

伸縮計 編號	第一段之潛變參數		第三段之潛變參數		備註
	c 值	r 值	a 值	r 值	
SL-1	0.02191	0.96526	17.3219	0.95026	
SL-2	0.00141	0.73287	5.6005	0.95339	
SL-3	0.02392	0.82517	15.9014	0.80656	
SL-4	0.02732	0.66661	1.9220	0.79733	

表 3 明潭水庫集水區地滑地潛變破壞曲線推估式

伸縮計 編號	潛變推估方程式	r ² 值
SL-1	$= 6.767 \times 10 \times (1-e) + 2.808 \times 10 \times t + 3.474 \times 10 \times t$	0.72201
SL-2	$= 2.142 \times 10 \times (1-e) + 5.81 \times 10 \times t + 7.876 \times 10 \times t$	0.93531
SL-3	$= 7.789 \times 10 \times (1-e) + 6.7 \times 10 \times t + 2.332 \times 10 \times t$	0.90934
SL-4	$= 1.233 \times 10 \times (1-e) + 2.503 \times 10 \times t - 1.1 \times 10 \times t$	0.91364

其次，在求解合理之三次潛變曲線式時因待定係數多達五個，有必要先歸納簡化以利方程式的計算，故乃根據潛變曲線式之參數特性，分別選取潛變曲線的第一段與第三段資料，再以單對數與雙對數座標分析其資料之相關性與斜率參數，進而得到較佳的潛變曲線式中之c與a值，如表2所示，將之代入原始曲線式並利用最小平方求出較合理之三次邊坡崩塌時刻曲線式，如表3所示。

由上列各組推估式可知各組推估式之模擬效果均甚佳，但由於曲線式的各段蜿蜒特性不盡相同，使得SL-1與SL-3之效果

較不如SL-2與SL-4，亦即地滑的地表滑移應變歷線之型態與一般材料的潛變破壞曲線間雖極為類似，但確仍存有些微之差異性。究其原因，可能係由於一般材料在受到應力持續作用下之應變情形，若採用此種潛變破壞曲線式是可以合理的推測出來的，但地滑邊坡之地表滑移龜裂則往往受制於自然（如降雨、地震、地下水……等）與人為環境因素的干擾，以及監測儀器設置區域的不同等影響，遂呈顯階段性斷續之滑移。其中SL-1與SL-3號伸縮計之潛變破壞推估曲線相關性雖較低，但由於監測期跨越一較長的乾旱氣候時節，故待

濕季來臨時其地表移動變量即有顯著的反應出來；而SL-2號伸縮計則因同時受擠壓與伸張應力作用，故地表移動應變歷線受到各種誘因之影響反應較不顯著，但所求得之潛變破壞推估曲線之蜿蜒擬合效果較好，相關性也較高。但SL-4號伸縮計因設置時間較晚，且設置後既逢當年之雨季與颱風，因此其地面在極短的時間就出現明顯地裂隙滑移現象，故依照此模式求之推估式所代表之意義，僅係代表第三段潛變歷線之一部份，而並非是全部之歷程變化，因此所求得之潛變參數 c 、 a 值之相關性最差。綜合上述之分析，雖均可得到不錯的模擬曲線可供為預估地表之滑移變量，然而因其中仍隱藏有某些因素之影響，故應有需要再就不同應變歷線變化將各個因子之影響予以獨立出來。

結論

明潭水庫集水區地滑地自實施監測工作開始後，歷經本省之乾旱年與豐雨年（民國八十二年九月至民國八十三年八月之間），由於期間確實發生了連續且較明顯之滑移（龜裂擴大及下陷近二公尺），應屬滑動相當明顯之危險邊坡，故乃採用其地表變動量監測資料進行分析。雖然由實測的資料顯示，地層滑移應變崩壞與材料之試驗潛變破壞兩者之歷線是極為類似的，但是由於諸多破壞誘因的力源與監測設施所設置區域的變異性，以及其持續受

外力作用時間長短等問題，使得於求解潛變破壞曲線推估式的同時，仍可能將這些影響因素予以隱藏其中，遂造成曲線推估式的模擬差異。

日本學者齊藤氏所提出之潛變崩壞預測式對邊坡崩壞時刻的預測結果，在本文中驗證之效果屬尚能適用。然而可能因為地區性的差異或者是因滑動類型之要求，就本文而言所預估之崩壞時刻仍有偏高的情形存在，故乃須更多而可靠之調查監測資料，供為檢定本預測式應用於本省邊坡滑動破壞有效性之參考。

邊坡滑動潛變破壞推估預測之研究工作，在我國由於相關研究學者不多，且無實際地應用案例可供參考，更遑論成功地預測到危險邊坡的滑動崩壞時刻，而能即時緊急疏散人員、重要設施或為必要之處理等成果。因此就坡地防災之觀點，應有必要加強此方面之研究工作，以達到能夠確實預測邊坡滑動災害發生的境界，並有效掌握救災動員時機，而減少人民生命財產的損失。

引用文獻

1. 工研院能資所，1992，梨山地區地層滑動調查與整治方案規劃報告，p.90-96。
2. 李德河，1984，邊坡破壞時間之預測，地工技術雜誌，第7期，p.7-12。

3. 福園輝旗, 1985, 表面移動速度の逆數を降雨による斜面崩壞發生時刻の予測法, 地すべり, 第22卷第 2號, p.8-13。
4. 駒村富士彌、何智武, 1985, 地滑之界動及其抑制對策, 土石流及其防治論文集(一), p.37-65。
5. 林、駒村、朴, 1988, 斜面崩壞時期の予測について, 地すべり, 第24卷第 4號, p.11-18。
6. 山口眞一, 1977, 斜面崩壞時期の予測式の補正係數について, 地すべり, 第14卷第 2號, p.1-3。
7. 齊藤迪孝、上澤弘, 1966, 斜面崩壞時期の予知, 地すべり, 第2卷第 2號, p.7-12。
8. 植, 1989, 地すべり工學—理論と實踐, 山海堂, p.356-361。
9. 呂世璋, 1995, 明潭水庫邊坡穩定之研究, 國立中興大學水土保持學研究所, 碩士論文, 84pp。
10. 駒村富士彌, 1976, 地すべりの舉動に關するレオロジー的研究(II), 新砂防, 第29卷第 2號, p.17-19。

A Study on Predicting the Timing of Creep Failure Occurrence by Differential Displacement of Landsliding Surface

Cheng-Yi Lee⁽¹⁾ Chung-Li Shu⁽²⁾

ABSTRACT

Slope failures often produce great loss of lives, public installations and properties. Therefore, predicting the timing of slope creep failure is very important because it will allow more sufficient preparation and reduce the degree of disaster loss.

This study utilized the material model of creep failure and constant strain rate of secondary creep to compare and modify the results of theoretical analysis and field observation data of surface differential displacement at a landslide site near the Min-Tan Reservoir. The results show that the material model can be used to predict the timing of slope failure occurrence.

Keywords: Surface Differential Displacement, Landslide, Creep Failure, Timing of Failure

-
- (1) Professor, Department of Soil and Water Conservation, national Chung Hsing University, Taiwan, R.O.C.
 - (2) Graduate Student, Department of Soil and Water Conservation, national Chung Hsing University, Taiwan, R.O.C.