

# 漫地流之水理分析

王鼎佑<sup>[1]\*</sup> 謝平城<sup>[2]</sup>

## 摘要

由於都市開發減少地表的粗糙度與滲透率，造成集流時間減少且逕流量增加，進而使下游地區洪水發生的頻率與規模增加，所以預測降雨造成漫地流流況的變化成為一項重要的課題。本研究以擴散波模式對地表較緩之坡面進行水理分析，採用廣義積分轉換法進行解析，並與前人研究所得之結果作比較，藉此模擬出不同降雨強度下產生之漫地流。接著，將入滲所造成之影響納入考量，以自然土壤及透水性鋪面為案例進行模擬，使所得結果較符合實際現象，期望能達到災害防治的目的。

(**關鍵詞:** 擴散波、降雨、坡面、漫地流、廣義積分轉換法、入滲)

## Hydraulic analysis of overland flow

*Ding-you Wang*<sup>[1]\*</sup> *Ping-Cheng Hsieh*<sup>[2]</sup>

### ABSTRACT

Because of the urban development, surface roughness and permeability decrease. This phenomenon leads to the decrease in time of concentration and the increase in surface runoff, and also make the frequency and scale of floods in downstream areas increase. For this reason, the prediction of change of the overland flow due to rainfall has become an important issue. In this study, the diffusion wave model is used to carry out the hydraulic analysis on a mild slope. The generalized integral transformation technique is employed in the model. The results are compared with previous research, and acceptable. In this study, the overland flow under different rainfall intensities is simulated with consideration of the effect of infiltration. Considering natural soil and pervious pavement makes the results more realistic. It is hoped to achieve the purpose of disaster prevention and control.

(**Key words:** diffusion wave, rainfall, slope, overland flow, Generalized Integral Transformation Technique, infiltration)

---

[1]國立中興大學水土保持學系碩士生(通訊作者，email: www101245@gmail.com)

[2]國立中興大學水土保持學系

## 前言

隨著現代都市的蓬勃發展，地貌的改變使得地表的摩擦力及入滲量減少，導致地表逕流量增加及集流時間減少，若發生強降雨事件，原先設計的城市排水系統可能無法應對，因此預測地表逕流量及改善城市排水問題成為了一項重要課題。

漫地流可分為運動波、擴散波及動力波三類，其中動力波雖能較完整地描述物理現象，但是以動力波為基礎建立的 Saint-Venant 方程式由於其屬高度非線性，所以無法獲得其解析解，大多採數值方法對其作探討。運動波模式忽略了動力波模式中考慮的慣性項及壓力項，主要應用在較陡坡面(坡降 $>0.002$ )，擴散波模式僅忽略慣性項，可應用於運動波模式適用範圍及運動波模式無法滿足之較緩坡面。本研究採用擴散波模擬坡度較緩坡面之水理現象，能使得模擬結果更加接近降雨對地表造成之影響。

近年來有關如何改善排水的議題被廣泛地討論及開發，當中包括在路面上鋪設透水性鋪面加速雨水入滲的方法。本研究將探討使用透水性鋪面前後與地表為自然土壤相對於不透水鋪面地表水理現象的差異。

研究流程如圖 1 所示，參考文獻中依擴散波定義所建立的控制方程式，收集其中所需應用到的降雨、入滲及底床坡度等方面的資料，最後使用解析解方式作分析。

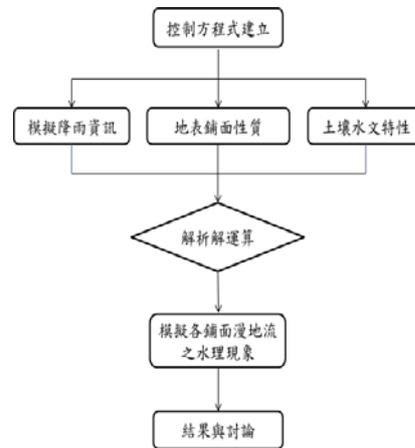


圖 1 研究流程圖

Fig. 1 Study flow chart

本研究以廣義積分轉換法求解線性擴散波方程式和 Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007) 中使用的 MacCormack 數值解作驗證，比較在一均勻降雨的情況下，下游( $x = L$ )之出流量。並引用葉、林(2006)和 Hsu et al. (2002) 中利用實測和數值模型迴歸出的逕流係數及土壤入滲指數，搭配其對照之地表質地，模擬漫地流水深及流量變化。

## 材料與方法

### 1. 控制方程式建立

本研究模擬地表在均勻降雨情況下，漫地流沿坡地流動情形，假設降雨垂直於坡面，地表與水平線夾角 $\theta$ 對應坡降為 $S_0$ ，水流往下游方向傳遞，如圖 2 所示。

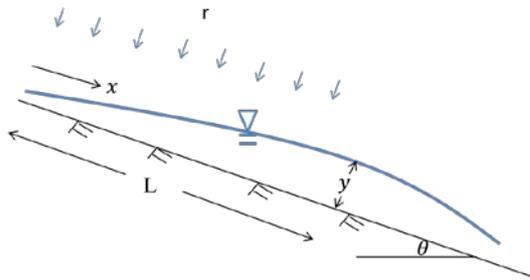


圖 2 研究示意圖

Fig. 2 schematic diagram of study

引用 Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007)所提到的擴散波方程式為控制方程式：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} = k_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (r - f) \quad (1)$$

其中， $y$ 為水深(L)， $c$ 為擴散波波速(L/T)， $k_1$ 為擴散係數(L<sup>2</sup>/T)， $r$ 為降雨強度(L/T)， $f$ 為入滲率(L/T)， $t$ 為距離(T)， $x$ 為距離(L)。

$$\text{其中，} c = \frac{5}{3}v, k_1 = \frac{q}{2s_0} \quad (2)$$

(2)式中， $v$ 為流速， $q$ 為單寬流量。

初始條件：

$$y(x, t = 0) = 0, 0 < x < \infty \quad (3)$$

邊界條件：

$$y(x = 0, t) = 0, t > 0 \quad (4)$$

$$y(x \rightarrow \infty, t) = 0, t > 0 \quad (5)$$

## 2. 變數變換法

廣義積分轉換法為求解傳導問題所使用的方法，欲滿足其偏微分方程式型式需先經由變數變換法消除空間一次項。

$$\text{令 } y(x, t) = e^{\frac{c}{2k_1}(x - \frac{c}{2}t)} y_v(x, t) \quad (6)$$

其中， $y_v$ 為變數變換後之水深。

將(6)式代入(1)式，得：

$$\frac{\partial^2 y_v}{\partial x^2} - \frac{1}{k_1} \frac{\partial y_v}{\partial t} = -e^{-\frac{c}{2k_1}(x - \frac{c}{2}t)} \frac{1}{k_1} (r - f) \quad (7)$$

初始條件：

$$y_v(x, t = 0) = 0, 0 < x \quad (8)$$

邊界條件：

$$y_v(x = 0, t) = 0, t > 0 \quad (9)$$

$$y_v(x \rightarrow \infty, t) = 0, t > 0 \quad (10)$$

## 3. 廣義積分轉換

引用 Özisik (1968) 提出的廣義積分轉換法內容，參考其應用於空間半無限域時廣義積分轉換法的運用方法。

廣義積分轉換公式：

$$y_F(\lambda, t) = \int_{x'=0}^{\infty} K(\lambda, x') y_v(x', t) dx' \quad (11)$$

積分反轉換公式：

$$y_v(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} K(\lambda, x) y_F(\lambda, t) d\lambda \quad (12)$$

將(7)式逐項取廣義積分轉換得：

$$\int_{x=0}^{\infty} K(\lambda, x) \frac{\partial^2 y_v}{\partial x^2} dx - \frac{1}{k_1} \frac{\partial y_F}{\partial t} = \varphi_r(\lambda, t) \quad (13)$$

其中，

$$\varphi_r(\lambda, t) = \int_{x'=0}^{\infty} k(\lambda, x') e^{-\frac{c}{2k_1}(x' - \frac{c}{2}t)} (r - f) dx'$$

將(13)式等號左邊空間二次項以分部積分法做處理消除後，整理得：

$$\frac{\partial y_F(\lambda, t)}{\partial t} + k_1 \lambda^2 y_F(\lambda, t) = \varphi_r(\lambda, t) \quad (14)$$

根據(14)式求得  $y_F$ ：

$$y_F(\lambda, t) = e^{-k_1 \lambda^2 t} \int_{\Gamma=0}^t e^{k_1 \lambda^2 \Gamma} \int_{x'=0}^{\infty} K(\lambda, x') e^{-\frac{c}{2k_1}(x' - \frac{c}{2}t)} (r - f) dx' d\Gamma \quad (15)$$

根據邊界條件得知  $K(\lambda, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x$  (16)

將(15)式代入(12)式再代入(6)式，配合降雨區間為 0~L 之條件得：

$$y(x, t) = e^{\frac{c}{2k_1}(x-\frac{c}{2}t)} \int_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x e^{-k_1 \lambda^2 t} \int_{\Gamma=0}^t e^{k_1 \lambda^2 \Gamma} \int_{x'=0}^L \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x' e^{-\frac{c}{2k_1}(x'-\frac{c}{2}\Gamma)} r_0(t) dx' d\Gamma d\lambda \quad (17)$$

將三重積分項依序做積分，先對  $d\lambda$  項積分：

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-k_1 \lambda^2 (t-\Gamma)} \sin \lambda x \sin \lambda x' d\lambda = \frac{1}{[4\pi k_1 (t-\Gamma)]^{\frac{1}{2}}} \left[ e^{-\frac{(x-x')^2}{4k_1(t-\Gamma)}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4k_1(t-\Gamma)}} \right] \quad (18)$$

再對  $dx'$  項積分：

$$\int_{x'=0}^L \left[ e^{-\frac{c}{2k_1}x' - \frac{(x-x')^2}{4k_1(t-\Gamma)}} - e^{-\frac{c}{2k_1}x' - \frac{(x+x')^2}{4k_1(t-\Gamma)}} \right] dx' = -\sqrt{\pi k_1} \sqrt{t-\Gamma} \cdot \left[ e^{\frac{c^2}{4}(\frac{t-\Gamma}{k_1})} e^{-\frac{cx}{2k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x}{2}\right) - e^{\frac{c^2}{4}(\frac{t-\Gamma}{k_1})} e^{\frac{cx}{2k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x}{2}\right) - e^{\frac{c^2}{4}(\frac{t-\Gamma}{k_1})} e^{-\frac{cx}{2k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x-L}{2}\right) + e^{\frac{c^2}{4}(\frac{t-\Gamma}{k_1})} e^{\frac{cx}{2k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x+L}{2}\right) \right] \quad (19)$$

最後對  $d\Gamma$  項積分：

$$y = \frac{r-f}{2} \cdot \int_{\Gamma=0}^t \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x-L}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x}{2}\right) + e^{\frac{cx}{k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x}{2}\right) - e^{\frac{cx}{k_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{t-\Gamma}{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_1(t-\Gamma)}} \frac{x+L}{2}\right) \right] d\Gamma \quad (20)$$

(20)式即為漫地流之水深解。

可利用漫地流水深運用曼寧公式求出流速，再進一步以連續方程式計算出流量。

#### 4.入滲分析

##### (一)透水性鋪面

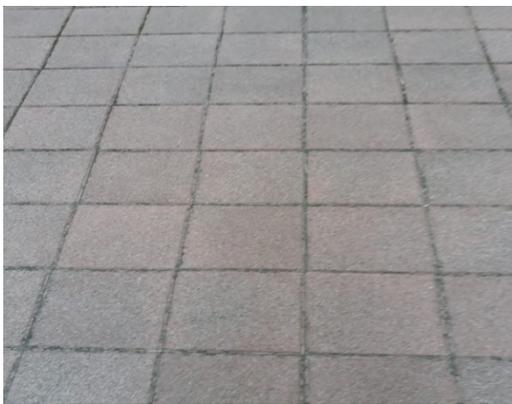
葉、林 (2006) 中對透水鋪面做介紹，並以其文中所提及之系統對數種透水性鋪面進行分析，本文採用其中的三種鋪面材質作探討，此三種透水性鋪面的種類示意如圖 3 及其逕流係數如表 1 所示：



(a)



(b)



(c)

圖 3 透水性鋪面種類之示意: (a)透水瀝青、(b)植草磚及(c)透水磚

Fig. 3 Permeable pavement type:

- (a) permeable asphalt, (b) grass bricks, and (c) permeable bricks

## (二)自然土壤

Hsu et al. (2002) 對自然土壤採用數種入滲模式與實測資料做比較，本研究引用其文中的 Horton 入滲模式作探討。Horton 公式如下：

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-at} \quad (21)$$

式中， $f_0$ 為初始入滲率， $f_c$ 為最終入滲率， $a$ 為指數衰減率，並定義 $t_s$ 為土壤達飽和時間。將

上式所用參數依黏土、壤土及砂土分類如表 2 所示。

表 1 透水性鋪面參數(葉、林, 2006)

Table 1 permeable pavement parameters (Yeh and Lin, 2006)

鋪面種類	逕流係數	採用值
透水瀝青	0.1-0.4	0.25
植草磚	0.3-0.4	0.35
透水磚	0.2-0.4	0.3

表 2 土壤入滲參數 (Hsu et al., 2002)

Table 2 Infiltration parameters for different soils (Hsu et al., 2002)

	$f_0$ (cm/ hr)	$f_c$ (cm/ hr)	$a$	$t_s$ (hr)
黏土	0.0924	0.0512	0.0139	410
壤土	1.36	1.01	0.115	64
砂土	19.5	15.6	4.12	1.8

參考水土保持手冊(2013)規範，土溝之曼寧粗糙係數值如表 3 所示：

表 3 曼寧粗糙係數(水土保持手冊,2013)

Table 3 Manning roughness coefficient (Soil and Water Conservation Handbook, 2013)

溝內物質	n 值範圍	平均值
黏土質且 溝身整齊者	0.016-0.022	0.020
砂壤、黏壤土 且 溝身整齊者	-	0.020

均採  $n=0.02$  計算。

### 5.線性化參數

若參數 $c$ 及 $k_1$ 為定值，則(1)式為線性偏微分方程式，又 Dooge and Napiorkowski (1987) 中提到(2)式的流速及單寬流量需採平均值做計算，Liu et al. (2003) 對地表緩坡流速以地理資訊系統配合曼寧公式進行估算，結果顯示在集水區上游之漫地流流速約 0.005m/s，下游河川則可達到 2 m/s，但由於所流速大小涵蓋範圍相當大導致參數給定不易，因此許多採用線性擴散波模式模擬之研究中均僅給予參數 $c$ 及 $k_1$ 合理值進行模擬，故本研究多採用 Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007) 所使用之參數進行探討。

## 結果與討論

### 1.模式驗證

圖 4 為與 Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007) 數值解比較圖，模擬均勻降雨作用於停車場，停車場出口處之流量所使用參數如表 4 所示：

表 4 驗證用參數

Table 4 Parameters for verification		
參數名稱	數值	單位
降雨區間 $L$	182.88	m
擴散波波速 $c$	0.11	m/s
擴散係數 $k_1$	0.93	$m^2/s$
降雨強度 $r$	50.8	mm/hr
降雨延時 $t_r$	30	min
底床坡降 $S_0$	0.0016	
曼寧糙度 $n$	0.025	

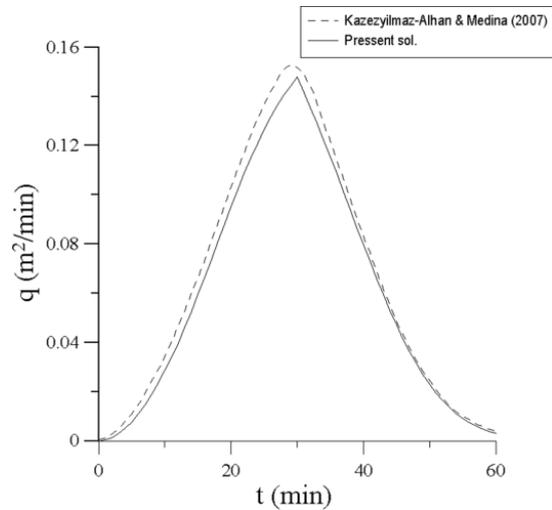


圖 4 解析解出口處流量之驗證

Fig. 4 Verification of the outflow discharge for the analytical solution

從圖 4 可看出均勻降雨情況下，兩者所得之出流量有些許差異，但差異不大，由於兩者皆採用(1)式為控制方程式，故判斷此誤差可能是數值解將方程式離散化所導致。

### 2. 不同位置之水理現象

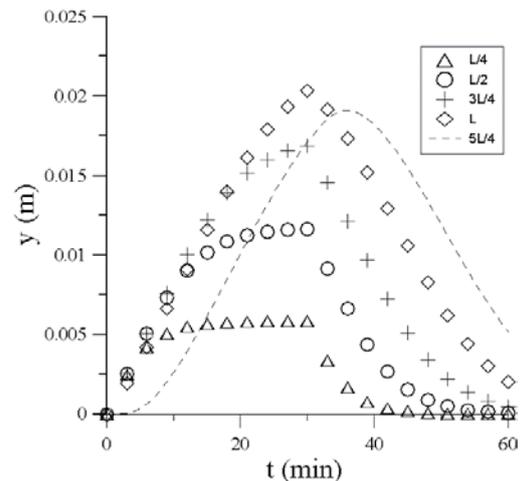


圖 5 不同位置之漫地流水深變化

Fig. 5 Variation of water depth for different locations

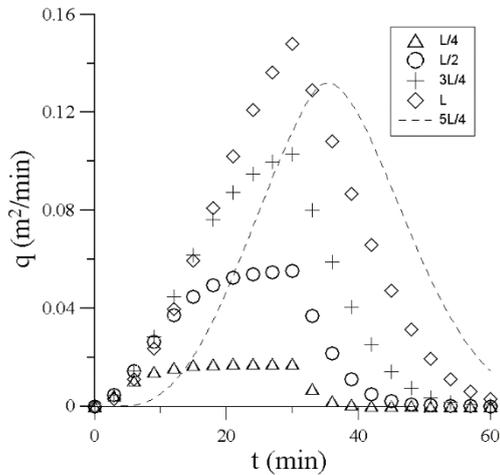


圖 6 不同位置之漫地流流量變化

Fig. 6 Variation of discharge for different locations

從圖 5 與圖 6 得知在降雨延時內  $x=L$  處受降雨影響較大，故水深及流量的最大值均發生於此，且在降雨結束後水會持續向下游流動，造成  $x=5L/4$  處之最大水深及流量值較出口處上游  $x=3L/4$  處大。

### 3. 透水性鋪面評估

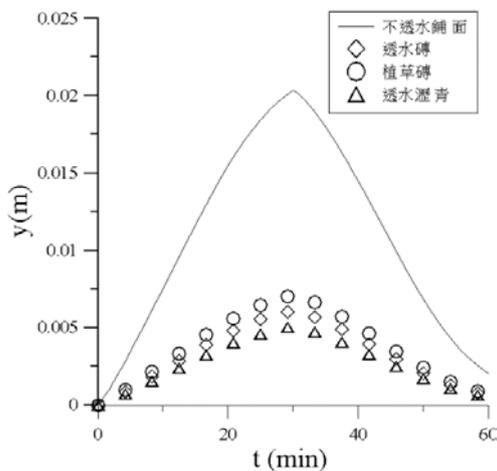


圖 7 不同鋪面之漫地流水深變化

Fig. 7 Variation of outflow water depth for different pavements

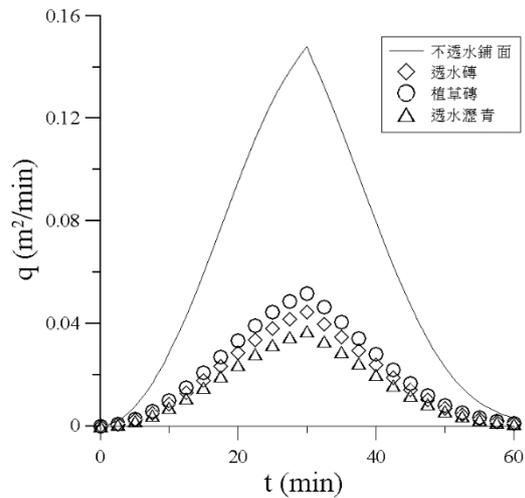


圖 8 不同鋪面之漫地流流量變化

Fig. 8 Variation of outflow discharges for different pavements

圖 7 與圖 8 為停車場出口處 ( $x=L$ ) 水深及流量之變化，在相同的假設條件下，使用透水性鋪面前後可以有效達到減少洪峰流量的效果，實際減少的量與逕流係數有關。透水磚、植草磚及透水瀝青分別減少 75%、65% 及 70%。

### 4. 自然土壤表面評估

由於自然土壤與驗證用參數中所採曼寧糙度值不同，因此給予此範例一組新的參數進行探討，如表 5 所示：

表 5 模擬參數

Table 5 Parameters for simulation

參數名稱	數值	單位
降雨區間 $L$	100	m
擴散波波速 $c$	0.08	m/s
擴散係數 $k_1$	0.35	$m^2/s$
降雨強度 $r$	50	mm/hr

降雨延時 $t_r$	30	min
底床坡降 $s_0$	0.001	
曼寧糙度 $n$	0.02	

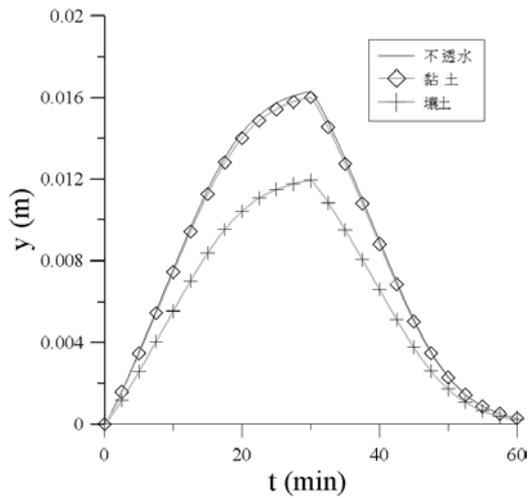


圖 9 不同土壤之漫地流水深變化

Fig. 9 Variation of water depth for different soils

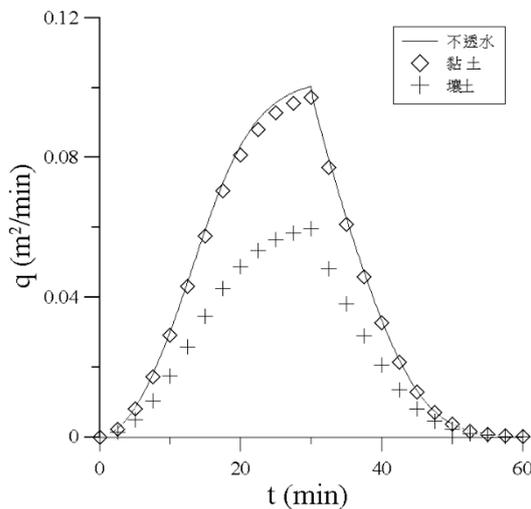


圖 10 不同土壤之漫地流流量變化

Fig. 10 Variation of outflow discharge for different soils

從圖 9 和圖 10 看出自然土壤方面依據土壤種類不同，對地表逕流的影響程度差異也不同，在降雨量充足的情況下，黏土與砂土的初始入滲率大小相差近 200 倍，其中，砂土的飽和入滲率高達 15.6cm/s，如表 2 所示，降雨強度要高於此標準實屬不易，故可以判斷在地表為砂土情況時，降雨很難導致積水現象產生，大多情況均無逕流量。

### 結論與建議

1. 本研究首度引用廣義積分轉換法成功求解線性擴散波模式問題，所得解析解與前人研究所得數值解結果差異不大。
2. Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007) 僅對停車場出口處之水理現象作探討，並未分析不同位置漫地流之差異及入滲造成之影響，故針對以上兩點加以探討。
3. 降雨結束後水依舊會往下游流動，圖 3 中  $x=3L/4$ 、 $L$  和  $5L/4$  處的最大水深分別為 0.0169、0.0203 和 0.0191(m)；最大流量分別為 0.103、0.148 和 0.132 ( $m^2/min$ )，雖然停車場出口上游端均在降雨區間內，但是水往下游流動之現象明顯比降雨對漫地流之水理現象影響更大，導致停車場出口處下游 ( $x=5L/4$ ) 處最大水深值為上游 ( $x=3L/4$ ) 處的 1.13 倍；最大流量值為 1.28 倍。
4. 在漫地流考慮入滲的情況下時，其洪峰水深和流量的值及其出現時間均會受到影響，本研究中洪峰流量值可以看出明顯差異，透水性鋪面減少比例為  $(1-逕流係數)*100\%$ ；黏土減少 2.8%；壤土減少 40%，砂土則無漫地流，但在自然土壤情況下，洪峰流量出現時

間無法因入滲看出明顯差異，可能是降雨延時不夠長所造成，若延長降雨延時則土壤越趨近飽和，較能判別其差異。

- 5.本研究引用 Kazezyilmaz-Alhan and Medina (2007)所提到的擴散波方程式為控制方程式，式中將非線性項簡化給予一定值將其線性化，此為加快演算速度之技巧，倘若要描述真實的物理現象還是使用未加以簡化的非線性方程式為佳。
6. Collins (2007) 將不同材質之透水性鋪面以不同排列方式運用於停車場，結果顯示較使用單一材質之透水性鋪面排水效果佳，故可往如何適當地分配透水面積和透水能力方面做加強。

### 參考文獻

1. 水土保持手冊 (2013)，行政院農業委員會水土保持局，工-2-89。
2. 葉銘欽、林志棟 (2006)，「透水性鋪面專家諮詢系統建置之研究」，國立中央大學土木工程研究所碩士論文。
3. Collins, K.A. (2007). A field evaluation of four types of permeable pavement with respect to water quality improvement and flood control. Master's thesis, North Carolina State University.
4. Dooge, J.C.I. and Napiorkowski, J.J. (1987), "Applicability of diffusion analogy in flood routing" Acta Geophysica Polonica, 26(1), 65-75
5. Hsu, S.M., Ni, C.F. , and Hung P.F. (2002), "Assessment of Three Infiltration

Formulas based on Model Fitting on Richards Equation" J. Hydraul.Eng., 7(5), 373-379

6. Kazezyilmaz-Alhan, C.M. and Medina, M.A. (2007), "Kinematic and Diffusion Waves: Analytical and Numerical Solutions to Overland and Channel Flow" J. Hydraul.Eng., 133(2), 217-228
7. Liu, Y.B., Gebremeskel S., Smedt F.D., Hoffmann L., and Pfister L. (2003), "A diffusive transport approach for flow routing in GIS-based flood modeling" J. Hydraul.Eng., 283, 91-106
8. Özisik, M.N. (1968), Boundary value problems of heat conduction, Dover Publications, Inc., New York.

---

106年12月14日收稿

107年01月02日修改

107年01月16日接受

水土保持學報 49 (4): 2223 - 2232 (2017)

Journal of Soil and Water Conservation, 49 (4): 2023 - 2032(2017)