

非線性瞬時移動邊界模式之研究

陳彥錡⁽¹⁾ 張志華⁽²⁾ 謝平城⁽³⁾

摘要

台灣地區四面環海，海岸線長約 1,139 公里，海岸侵蝕造成的國土流失為一項重要的課題，一但國土被侵蝕就很難再恢復原狀，其可能衝擊沿海的各種產業，如工業、觀光業、養殖業。甚至造成沿海居民受災風險增高與沿海居民向內陸移居。而造成海岸侵蝕的原因主要為風力與海浪這兩者，而本文主要為討論海浪之部分，藉由研究海浪之特性以防止海岸之侵蝕。本研究應用曲線坐標順應瞬時變動之自由表面邊界，以勢能流函數發展二維完全非線性水波模式，探討其以淺水波理論給予初始條件的適宜性。模式採用貼壁坐標配合有限差分法求解完全非線性自由液面條件及拉普拉斯勢能流場方程式。計算問題注重在初始條件的探討。在模式印證部份，分析孤立波在平底床渠道長距離傳遞的計算結果。以孤立波的特性可維持非線性與頻散性平衡而維持波形不變的情況下以定速移動。結果發現淺水波的初始條件置入本模式完全非線性條件，波高會輕微降低，尾波會產生少許的不規則波，但在計算過程中逐漸調整滿足完全非線性的條件至收斂解。模式將滿足非線性條件移動長時間的孤立波數值解擷取其收斂解重新作為初始條件，則可明顯減小尾跡波的情形。

(**關鍵詞**：移動邊界、完全非線性、自由液面、貼壁坐標)

Study on the numerical model with nonlinear and transient moving boundary

Yan-Chi Chen⁽¹⁾ *Chih-Hua Chang*⁽²⁾ *Ping-Cheng Hsieh*⁽³⁾

Graduate Student⁽¹⁾, Professor⁽³⁾ Department of Soil and Water Conservation, National Chung-Hsing University, Taiwan

Associate Professor⁽²⁾, Department of Information Management, Ling Tung University, Taiwan

(1) 國立中興大學水土保持學系碩士生

(2) 嶺東科技大學資訊管理學系副教授

(3) 國立中興大學水土保持學系教授(通訊作者 email: pchsieh@dragon.nchu.edu.tw)

ABSTRACT

The coastline of Taiwan, an island all surrounded by the sea, is about 1,139 km long. Land loss caused by coastal erosion is an important issue. Once the erosion of land was difficult to restitution, it may impact the coastal variety of industry, tourism, and aquaculture. Moreover, it will also result in the increasing risk of coastal residents and the affected coastal residents move inland. The coastal erosion was mainly due to wind and waves effects, and this study is aimed at discussing the effects of the waves in order to prevent the erosion of the coast. This study is to develop a two-dimensional fully-nonlinear wave model of potential function. A transient curvilinear coordinate system is applied to fit the moving free surface. The main subject is focused on the initial condition problem. This model is combined with boundary-fitted grid and a fast finite-difference method to discretize the free-surface boundary conditions and the Laplace equation of potential function. It is known the solitary wave can travel with a constant speed and keep its symmetric shape because of its balance of nonlinearity and dispersion. It is convenient to impose our initial condition using Boussinesq analytic solution. However, there will be a series of weak trailing waves occurred behind the main wave, and the main wave amplitude is tiny smaller than that of the incident one. After the wave propagating a long distance, computational converged solution is gradually adjusted to satisfy the fully-nonlinear conditions. The main wave can fling the trailing waves. Thus, we cut the zone of computational solution as the initial condition of incident wave. It is shown this feedback can eliminate the trailing waves of solitary wave.

(Keywords : Moving boundary, Fully nonlinear wave, Free surface, transient boundary-fitted coordinate system)

前言

由於台灣地區的海岸保護結構物設置於沙灘上，因而容易造成淘刷沖蝕。平均海水位上升或堤前淘刷水深變大，均易造成更大波浪使海岸侵蝕，造成國土流失。海岸地區已成為我國國土開發中不可或缺之新開發空間，波浪與潮汐產生的水流是造成國土流失的最主要原因，且在每當颱風來襲時所形成的強浪，為海岸侵蝕最主要的外在力量。故本研究藉由了解波浪之傳遞行為以減少其對

於海岸之掏刷沖蝕，使其增加沿海地區之土地利用與海岸線周圍之產業發展。

本研究利用移動邊界或不規則的幾何邊界在計算力學常是一個需要克服的問題。Thompson et al. (1974)發展貼壁坐標格網可使格網貼合不規則邊界。對於變動的自由液面也可使用貼壁格網貼合，不過需要隨著時間變動格網。孤立波常被用來模擬孤立子(soliton)現象，在自然界存在許多孤立子的現象，如瞬間光波或電波訊號的衝擊、生物神經系統的傳遞、波浪之海嘯等。對於接近海

岸之水深淺化，波浪在淺水中運動，突顯其非線性特性，淺化碎波前的波浪與孤立波的形狀相似，故常以孤立波來模擬海岸工程應用之問題。

利用數值方法模擬變動邊界是個實際應用的問題。近年來，由於計算機的能力大大提升，二維甚至三維之波動模式已常見於文獻。Chang and Tang (1997) 曾應用貼壁坐標配合流函數來發展孤立波於均勻水深渠道運動之現象。Chang and Wang (2011) 曾發展三維淺體造波的模式，採用貼壁坐標配合有限差分法求解完全非線性自由液面條件與勢能流場方程式。不同於 Chang and Tang (1997)，本文將流函數以勢能函數替代，並以發展非線性波動模式為目標，測試孤立波傳遞特性(以往並未見有文獻仔細討論)，探討模式之初始條件給定的合理性。Wu (1981)與 Wang (1993)曾以 generalized Boussinesq 方程式推導孤立波內部流場的勢能流與孤立波波高解析解。Chang et al. (2007)，Yang and Tsay (2009) 在計算處理時間域，採用了二階中央差分法對時間離散所得之顯式前進差分計算。

本文使用之數值方法主要用以求解二維流場之勢能函數。首先，採用 Wang(1993) 的 generalized Boussinesq (gB)方程式利用水深平均勢能流函數($\bar{\phi}$)為主要變數進行推導的控制方程式。接著，初始條件採用 Wu (1981) 及 Wang (1993)所推導之解析解，假設在時間 $t=0$ 時得知其波形與勢能流函數。在計算時，建立與自由水面及不規則邊界瞬時貼合之貼壁格網(transient boundary-fitted grid)，再以有限差分法(finite difference method)離散內部流場之勢能方程式，疊代中以顯式與隱式之表

示法求解自由液面之邊界條件，求解自由液面與勢能流函數。

數學模式

1 初始條件

本文引用 Wu (1981)與 Wang(1993)方程式推導孤之孤立波波高(ζ)及水深平均之勢能函數($\bar{\phi}$)分別為：

$$\zeta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} [\text{sech}^2 k(x - Ct - x_0) + \alpha \text{sech}^4 k(x - Ct - x_0)] \quad (1)$$

$$\bar{\phi} = \sqrt{4\alpha/3} \tanh k(x - Ct - x_0) \quad (2)$$

$$\text{其中 } k = \sqrt{\frac{3\alpha}{4(1+\alpha)}};$$

$$C = \sqrt{1 + \alpha} \text{ (波速);}$$

$$\alpha = \text{無因次入射波高};$$

$$x_0 = \text{入射波起始位置};$$

Wu (1981)推導之流場勢能函數(ϕ)為：

$$\phi(x, y) = \bar{\phi} - \alpha \left(\frac{1}{3} + y + \frac{x^2}{2} \right) \nabla^2 \bar{\phi} + O(\epsilon^5) \quad (3)$$

$$\text{其中 } \epsilon = \text{水深/波長}。$$

將式(2)代入式(3)於 $t=0$ 可得

$$\phi(x, y) = \sqrt{4\alpha/3} \tanh k(x - x_0) \cdot [1 + \alpha k^2 (2/3 + 2y + y^2) \text{sech}^2 k(x - x_0)] \quad (4)$$

因此，式(1)當 $t=0$ 及式(4)分別為波形及勢能流函數初始條件。

2 控制方程式

假設流場為非旋性及不可壓縮流，因此，流場控制方程式滿足：

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

3 邊界條件

自由液面運動邊界條件

$$v = \zeta_t + u\zeta_x \quad (6)$$

自由液面動力邊界條件

$$\phi_t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \zeta = 0 \quad (7)$$

其中水粒子流速 $(u, v) = (\phi_x, \phi_y)$

4 底床及側邊界條件

底床為不透水結構物，假設 n 為邊界的單位法向量，則此邊界條件可表示為：

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (8)$$

計算側邊界選取波動不會影響的範圍，因此可假設

$$\phi = \zeta = 0 \quad (9)$$

數值方法

1 網格生成與數值離散

本文之計算坐標系統採用貼壁坐標 (transient boundary-fitted coordinate system)，故將原本的卡氏坐標 $(x, y; t)$ 轉換至曲線坐標 $(\xi, \eta; \tau)$ 系統上。

Laplace equation (5) 轉換後：

$$g^{11}\phi_{\xi\xi} + 2g^{12}\phi_{\xi\eta} + g^{22}\phi_{\eta\eta}$$

$$+ f^1\phi_{\xi} + f^2\phi_{\eta} = 0 \quad (10)$$

其中 $g^{11} = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)/J^2$

$$g^{12} = -(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta})/J^2$$

$$g^{22} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2/J^2$$

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}$$

$$f^1 = [(Jg^{11})_{\xi} + (Jg^{12})_{\eta}]/J$$

$$f^2 = [(Jg^{12})_{\xi} + (Jg^{22})_{\eta}]/J$$

水粒子流速 $(u, v) = (\phi_x, \phi_y)$ 之轉換後：

$$u = \phi_x = (y_{\eta}\phi_{\xi} - y_{\xi}\phi_{\eta})/J \quad (11)$$

$$v = \phi_y = (x_{\xi}\phi_{\eta} - x_{\eta}\phi_{\xi})/J \quad (12)$$

自由水面坐標轉換後的(6)式與(7)式：

$$\zeta_{\tau} = v - u(\zeta_{\xi}/x_{\xi}) \quad (13)$$

$$\phi_{\tau} - v\zeta_{\tau} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \zeta = 0 \quad (14)$$

由於波浪表面邊界隨時間位移，故在計算時 y 網格時，每次時間變化必須以當時之最高水位至底床距離以固定網格格數重新平均分配。

本文在處理時間域時，使用有限差分法求解流場。分別以顯式與隱式平均處理自由液面之邊界條件。(12)式與(13)式以差分法表示成離散式分別求解自由液面之波高 (ζ) 與勢能函數 (ϕ) 值。

2 演算法

(a) 初始時間 $t=0$

給定 α 及 x_0 經由(1)至(4)式解出在時之

初始條件。

(b) 計算時間 $t=n(n=1,2,3\dots)$

- (1) 記錄前一個的時間 $t=n-1$ 時刻之物理量。
- (2) 利用自由液面之運動與動力邊界條件求解液面上之 ζ 與 ϕ 值。
- (3) 由於自由液面產生變動，故重新分配新的 y 方向之網格分布。
- (4) 最後利用有限差分法計算全域 y (包含 ζ)， ϕ 值，並計算其速度場。
- (5) 重複(1)~(4)直至此計算時階收斂(誤差小於 10^{-5})。

(c) 疊代時間域

若收斂重複(1)~(5)步驟計算各時階之值，直至計算至最終時間；或若產生發散(誤差值無法下降或變大)，亦停止計算。

結果與討論

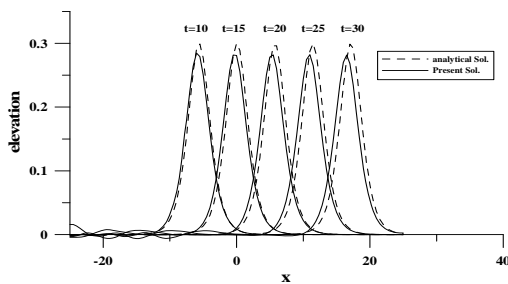


圖 1 Wu(1981)與 Wang(1993)之解析解與本數值模式計算之比較結果

Figure 1 Wu (1981) and Wang (1993) of the analytical solution compare with the numerical model

孤立波(孤立子)的計算常應用於光波、電磁波及水波的問題。經由計算域疊代後，所得之結果分別記錄 $t=10$ 、 15 、 20 、 25 、 30 之計算結果與 Wu(1981)與 Wang(1993)之解析解計算結果可由圖 1 觀察到其結果大致相同。孤立波有獨立波形，屬於非線性長波，傳遞時由於非線性 (nonlinearity) 與頻散性 (dispersion) 平衡的效應，使得波傳遞時能以對稱波形定速傳遞。計算入射波的條件給定應滿足流場方程式即邊界條件，但是由於含有非線性的方程式不易求得解析解，因此可考慮兩個做法：(1)以含有非線性條件發展的的模式，製造入射波；(2)以孤立波解析解的條件做為入射波條件。方法(1)需要造波機制，造波過程複雜，但是造出之孤立波可以符合開發模式的方程式。方法(2)則直接採用孤立波解析解置入，過程較方便，但是孤立波是非線性波，其解析解通常由攝動法 (Perturbation) 微擾展開近似求解，因此解析解並無法完全滿足非線性條件。本文發展之數值模式為考慮完全非線性條件，因此以方法(2)置入孤立波為初始條件，將產生初始不穩定的狀態。文中之變數均以靜水深及線性長波波速進行無因次量化，文中均以無因次量表示。

以孤立波解析解(Boussinesq solution)做為入射條件，選擇孤立波入射波的波高為 0.3，圖 2a 為初始條件($t=0$)的貼壁格網，圖 2b 為孤立波傳遞 $t=100$ 的貼壁格網，由圖可發現圖 2b 的自由表面會有明顯的尾波，這樣的尾波

並不合理，係因初始入射波要吻合本模式-完全非線模式收斂解所調整衍生的波動。因此本文對於初始條件的做法則希望當入射波傳遞長時間(e.g. $t=100$)之後，尾波已傳遞至後方，

主波則顯現出孤立波”獨立”的特性，再擷取主波做為計算其它孤立波問題之入射波條件，如圖 2b 在主波以粗線框出的範圍。本文是擷取波峰左右各 15 個單位水深的範圍。

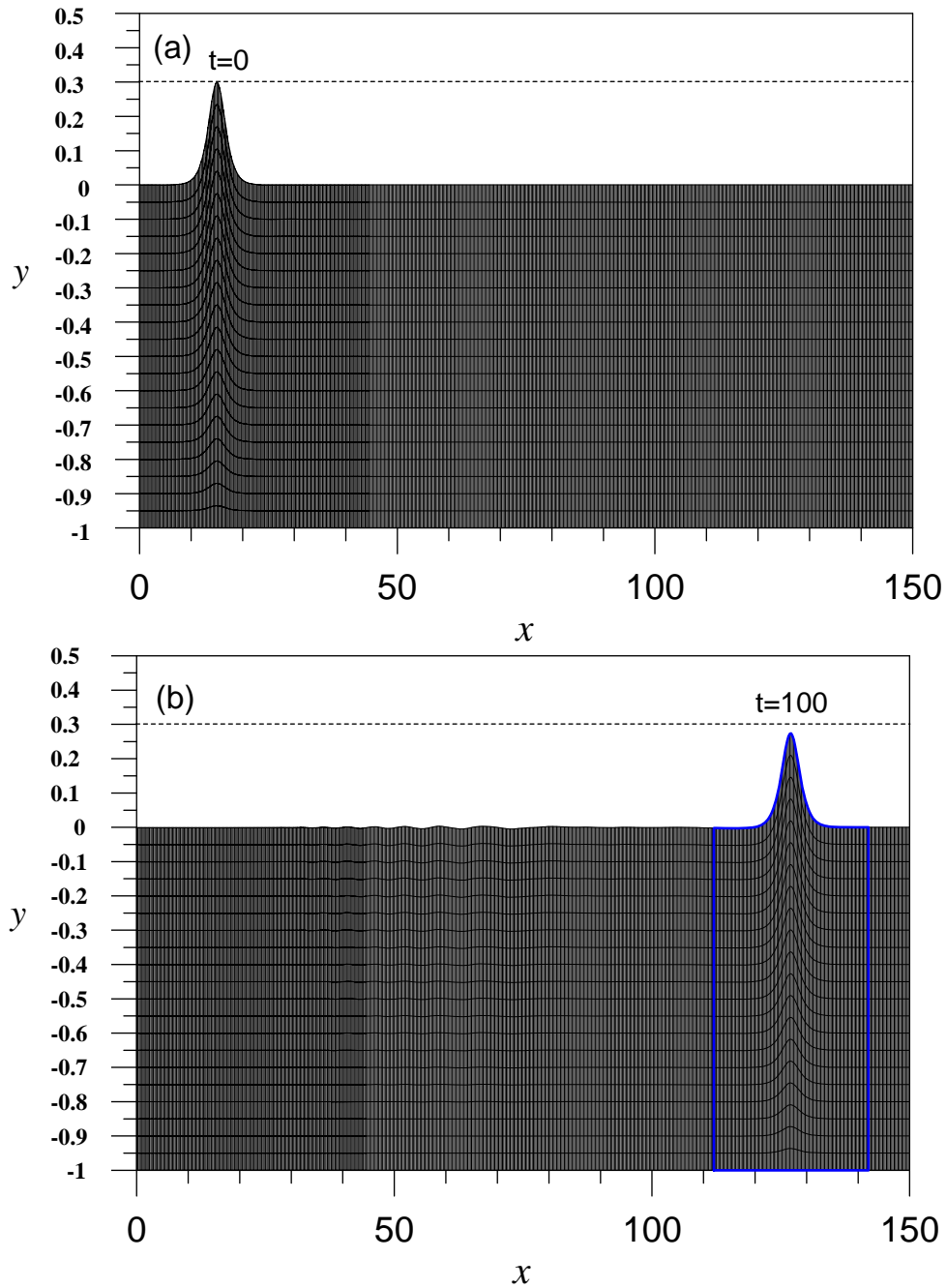


圖 2 以理論入射孤立波傳遞於等水深渠道經長距離之瞬時貼壁格網演變

Figure 2 Solitary wave passing over long distances in water depth channels using the transient boundary-fitted coordinate system.by theory

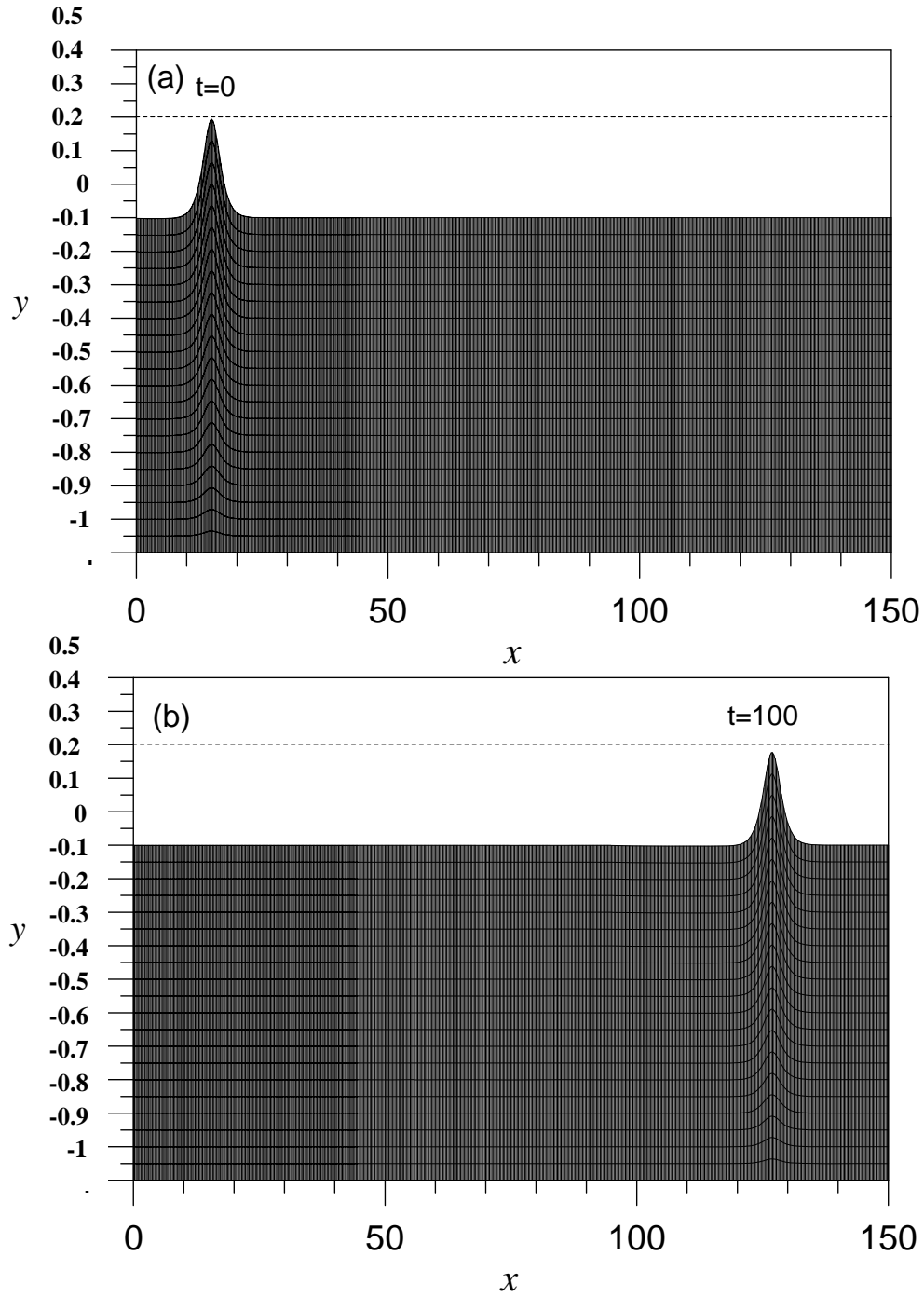


圖 3 以計算調整後之孤立波收斂解做爲入射波傳遞等水深渠道經長距離之瞬時貼壁格網演變

Figure 3 Solitary wave passing over long distances in water depth channels using the transient boundary-fitted coordinate system.by calculate converged solution

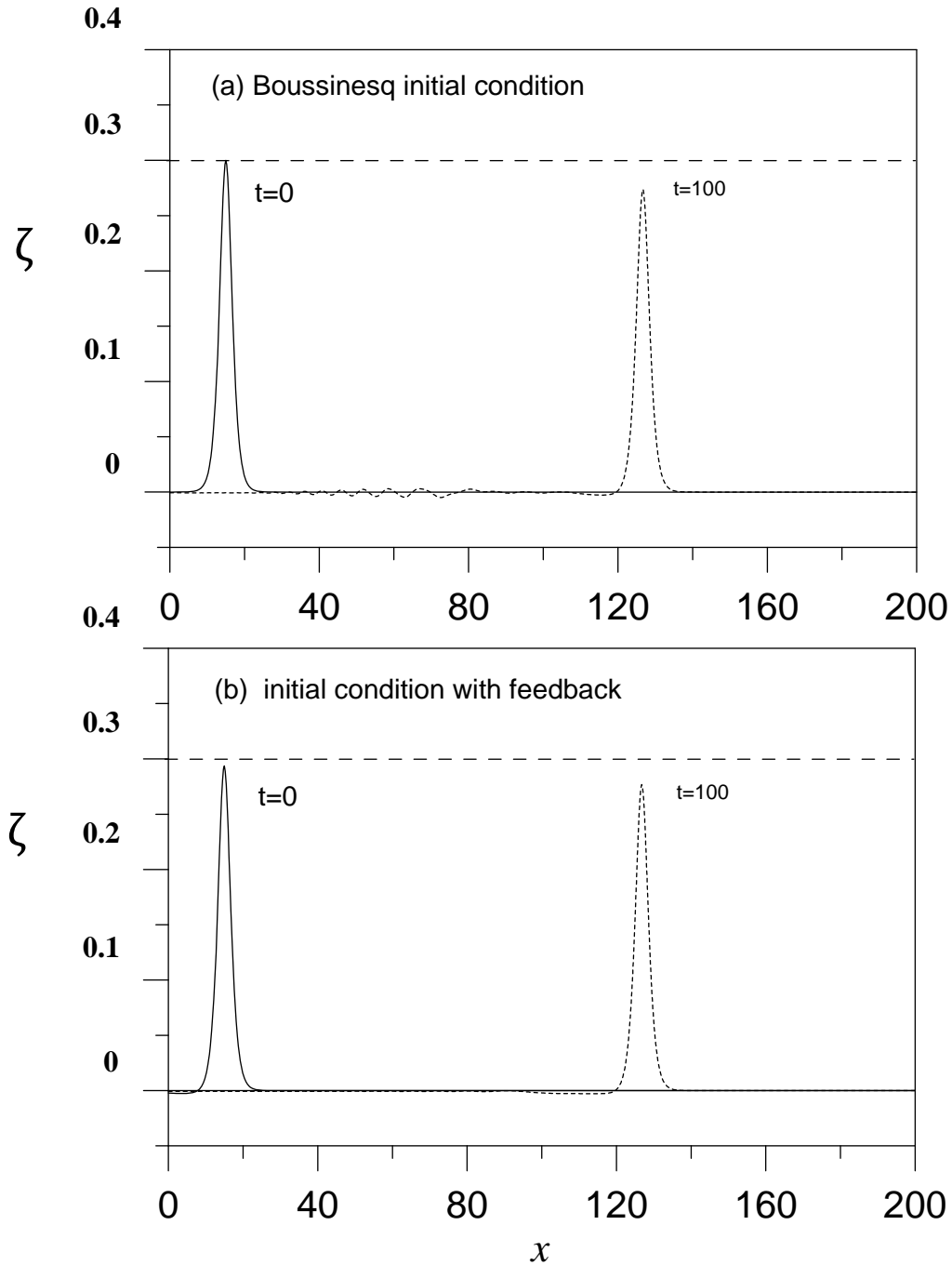


圖 4 孤立波傳遞 100 個單位時間之自由液面變化：(a)以孤立波解析解做為初始條件(b)以回饋之收斂解做為初始條件。

Figure 4 The solitary wave transfer time of 100 units free surface changes: (a) analytical solution to the solitary wave as the initial condition (b) to reward the converged solution as the initial conditions.

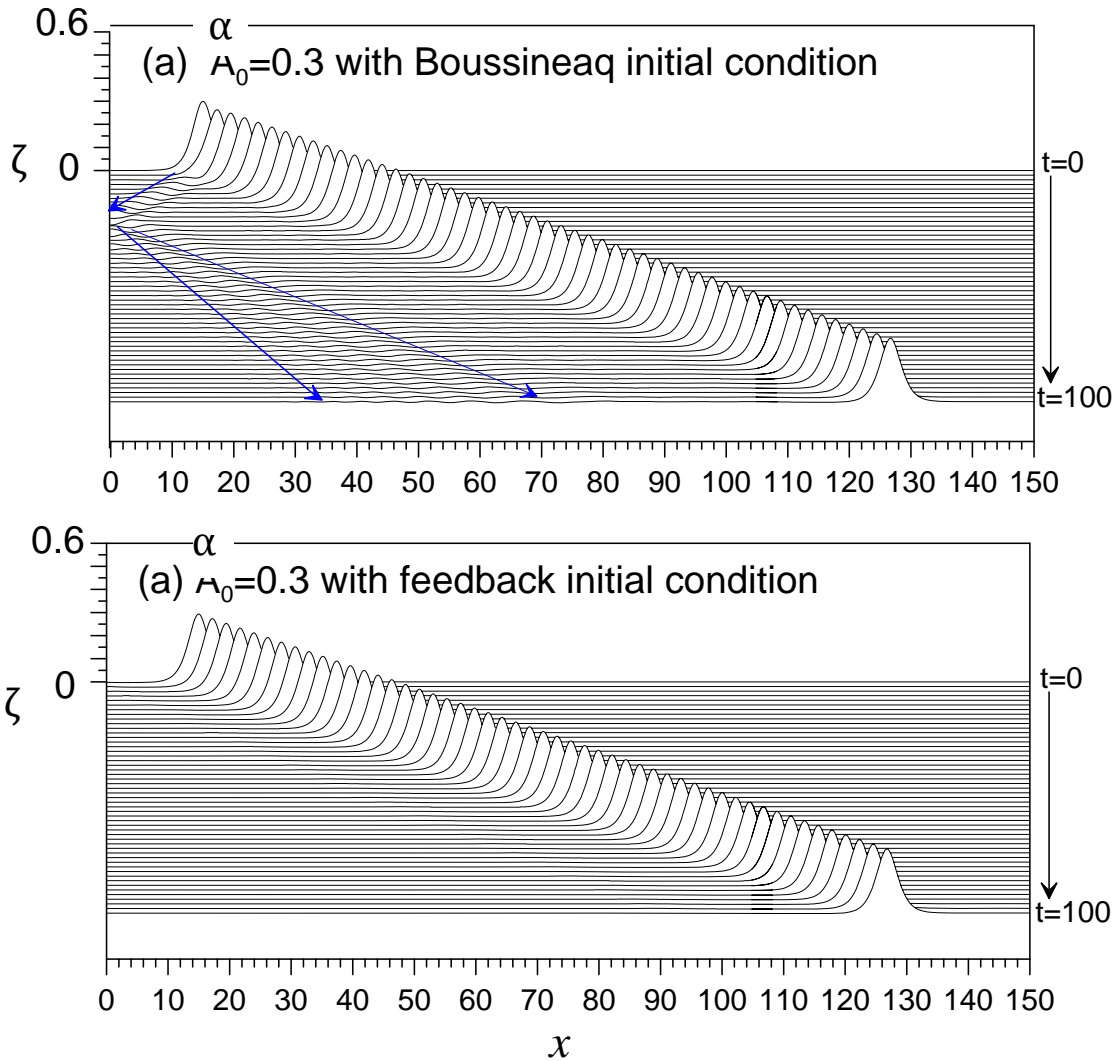


圖 5 孤立波傳遞之波形隨時間的透視變化:(a)以孤立波解析解做為初始條件(b)以回饋之收斂解做為初始條件。

Figure 5 The solitary wave transfer the waveform perspective changes over time : (a) analytical solution to the solitary wave as the initial condition (b) to reward the converged solution as the initial conditions.

圖 3 係以計算調整後之孤立波收斂解做為入射波傳遞於等水深渠道經長距離之瞬時貼壁格網演變圖，由圖 3a 於 $t=0$ 傳遞至 $t=100$ 圖 3b 的結果可發現，圖 3b 的自由液面的尾波現象則明顯減小許多。

圖 4 將自由液面之型態特別繪出，圖中顯示孤立波傳遞 100 個單位時間之自由液面變化。圖 4a 以孤立波解析解做為初始條件，顯然於 $t=100$ 的自由液面有尾波，而且波高有降低的情形。圖 4b 以入射解析解計算於 $t=100$ 的收斂結果回饋作為初始條件，再計算至 $t=100$ 的自由液面，由圖 4b 可看出 $t=0$ 的波高約為 0.29，傳遞後($t=100$) 波高略低於初始波高，而在波傳遞的後方有輕微的低陷波，但尾波明顯減小。圖 5 將 $t=0$ 至 $t=100$ 於每格 2 個單位時間的自由液面依序繪出，由圖可以看出自由液面的演變，圖 5a 係以解析解作為初始條件之傳遞情形，由圖可明顯看出傳遞過程所衍生了尾波，對孤立波而言，尾波應該部會太大，它來源可能由於數值計算造成或初始條件或非線性效應所造成，當主波往正 x 方向傳遞，此尾波會隨著時間增加而逐漸往負 x 方向移動，當遇到左方計算邊界時，則產生部分反射波；反觀圖 5b 的結果，以回饋之初始條件作為入射條件則波傳遞可幾乎保持孤立波的特性傳遞。

結論與建議

本文以貼壁坐標順應時變的自由液面，發展完全非線性勢能函數波動模式。探討孤立波傳遞之初始條件問題。以長時間傳遞後的調整(回饋)成滿足完全非線性條件之數值

收斂條件作為新的初始條件，可以有效消除尾跡波。此概念可應用於其它模式計算孤立波問題的初始條件處理方式。本文所擷取長時間之後的範圍為波峰左右各 15 個單位水深的範圍，未來可進一步探討選取範圍的影響，此外，可計算若干不同入射波的回饋結果作為率定資料，未來可由這些資料進行內差，求得任意入射波高的初始條件。

誌謝

本研究感謝國科會計畫 NSC 101-2221-E-275 -001 -經費之補助。

參考文獻

1. Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.W. (1974). "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies", *J. of Computational Physics*, 15, 299-319.
2. Chang, Chih-Hua and Keh-Han Wang, (2011), "Generation of Three-Dimensional Fully Nonlinear Water Waves by a Submerged Moving Object", *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 137, No. 2, pp. 101-112.
3. Wu, T. Y, (1981), "Long waves in ocean and coastal waters", *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 107(3), EM3, pp. 501-522.
4. Wang, K. H. ,(1993), " Diffraction of Solitary Waves by Breakwaters", *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 119(1), pp. 49-69.

5. Tang, chii-Jau and Jyh-Hwa Chang , (1997) , “Local grid refinement for nonlinear wave” Journal fo the Chinese Institute of Engineers, Vol. 20, No. 3, pp. 285-293.
6. 張志華、唐啓釗和李自強，(2007)，”三維非線性長波經突堤並淺化之傳遞分析”，第十六屆水利工程研討會論文集，苗栗，第 833-839 頁。
7. 楊琛澧、蔡丁貴，(2009)，”以完全非線性無網格方法數值模擬三維邊界移動造波”，臺灣大學土木工程學研究所學位論文，第 1-71 頁。

102 年 04 月 15 日收稿

102 年 04 月 29 日修改

102 年 05 月 15 日接受

水土保持學報 45 (4): 791 – 802 (2013)

Journal of Soil and Water Conservation, 45 (4): 791 – 802 (2013)