

地形特徵對測高曲線形狀的影響

陳樹群⁽¹⁾ 馮智偉^{(2)*} 賴益成⁽³⁾

摘要

測高曲線積分(hypsometric curve integral)常用來做為推測地形演變階段的指標，並且二維的測高曲線也被認為足以呈現因受構造作用、氣候及地質條件的影響而形成目前的三維地形特徵。然而，測高曲線與測高曲線積分並非一對一的對應關係，不同型態的測高曲線可能具有相同的測高曲線積分。因此本文藉由簡單地形斜面-漸縮型斜面、漸擴型斜面及先擴後縮型斜面-所具有的測高曲線及其積分來探討它們之間的關係。研究發現，不同型態的斜面的測高曲線會有完全不同的型態及其測高曲線積分。此外，本研究亦檢視不同切蝕程度及向源侵蝕的地形，探討各種地形對測高曲線形狀的影響及其所代表的意義。

(**關鍵詞**：測高曲線、測高曲線積分、地形演變)

Effect of topographic characteristic on the shape of hypsometric curve

Su Chin Chen⁽¹⁾

Professor, Department of Soil and Water Conservation,
National Chung Hsing University, Taichung 402, Taiwan, R.O.C.

Jhy Wei Ferng^{(2)} and Yi Cheng Lai⁽³⁾*

Graduate Student, Department of Soil and Water Conservation,
National Chung Hsing University, Taichung 402, Taiwan, R.O.C.

ABSTRACT

The hypsometric curve integral is a common useful index to infer the topographic evolution stage of a basin. And the hypsometric curve is also generally identified to represent the three-dimension at geomorphologic characteristic which is suffered by structure process, climate, and complex geologic conditions. Unfortunately, as we have known, hypsometric curve and its

⁽¹⁾ 國立中興大學水土保持學系教授

⁽²⁾ 國立中興大學水土保持學系博士生(通訊作者 Email:d9142006@mail.nchu.edu.tw)

⁽³⁾ 國立中興大學水土保持學系博士生

corresponding hypsometric curve integral are not a one-to-one relation but the two different types of hypsometric curves may be with the same hypsometric curve integral.

So, the study presents that the hypsometric curve and its integral will be affected by the shape and the relief of a basin simultaneously. By some simple fictitious uniform slopes, we found that downstream-ward contracted and expanded slopes have completely different types of hypsometric curve and the hypsometric curve integral. Besides, the study also surveys topography with different incision depth or headward erosion to find that how they influence the shape of hypsometric curves.

(**Keywords:** hypsometric curve, hypsometric curve integral, topographic evolution)

前言

Strahler(1952)利用測高法(hypsometry)來推測地形演化的發展階段。所謂的測高法是指記錄一地區(通常指集水區範圍)內，其高程超過某一值以上之面積占整個集水區面積百分比，即建立該地區相對高度與相對面積的關係，其關係曲線稱為測高曲線(hypsometric curve)。Strahler(1952)分析許多小集水區(約數平方公里)認為，地表經過快速造山運動的抬升後，構造的活動會一段很長時間的停歇期，在這段期間，由於地表侵蝕作用的盛行，地表的高程會逐漸降低，而集水區的測高曲線的型態也會隨之變化，測高曲線積分(hypsometric curve integral, HI)(即曲線下面積)會隨著時間的增加而變小。對應於風化侵蝕程度較低的幼年期地形，其測高曲線為凸形，測高曲線積分值較高，通常大於 0.6；而當集水區地形發展至壯年期的階段時，測高曲線通常呈現 S 形，測高曲線積分值介於 0.4~0.6 之間；而集水區地形演變至老年期階段時，測高曲線一般呈現上凹的型態，測高曲線積分值小於 0.4。

由於這個方法可以提供地形三維的訊息，因此地表高程的分布常被用來做為地形的比較。Ohmori(1993)認為測高曲線的積分

值提供描述高程分布的簡單的地形指標。不過，這個地形參數缺乏明確性，因為不同形狀的測高曲線卻可能有相同的測高曲線積分值(Hvrtrez et al., 1999)

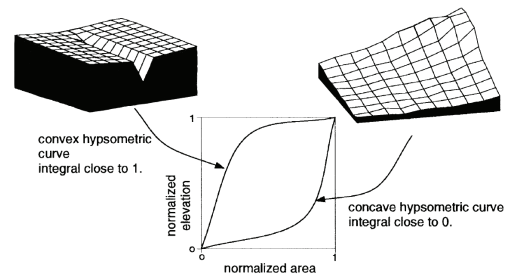


圖 1 地形與測高曲線特徵的關係示意圖(引用自 Hvrtrez et al., 1999)

Figure 1 The relation of topography and hypsometric curve (quote from Hvrtrez et al., 1999)

研究方法

(一) 測高曲線的型態特性

測高曲線用來描述集水區內超過某一高程 h 的區域面積 a ，因此該曲線的形態可以顯示地形的高度分布特性。為了方便將不同高度及面積的集水區做一比較，通常將高度及面積做正規化(normalization)處理。在本研究中，以 h 代表集水區任意位置相對於出口口的高程，而 a 代表集水區內高程超過 h

的區域的水平投影面積，此外， H 代表集水區之最大起伏量， A 代表整個集水區之面積。因此若以 h/H 為縱軸， a/A 為橫軸，我們可以繪製一條代表集水區地形特徵的測度曲線，而對於集水區最上游處 ($h = H$)，超過該高程的區域面積為零，而在集水區出流口處 ($h = 0$)， $a = A$ ，因此測高曲線介於 (0,1) 及 (1,0) 之間(圖 2)。

如上所述，測高曲線描述的是隨著度量高程減低時，超過該高程的區域之面積增加的狀況(本文稱為面積遞增率)，因此，在這一條關係曲線中，高程為一隨機變量，而面積則為一累積增量，再加上正規化的結果， a/A 的值介於 0 與 1 之間，所以測高曲線的特性便如同於統計中用來描述隨機變數(X) 特性的累積分布函數(cumulative distribution function, CDF)，只不過後者通常用來描述隨機變數小於或等於某一特定值(x) 時的累積機率(亦即 $F_X(x) \equiv P(X \leq x)$)，而前者則是指高程大於或等於某一特值的累積面積。

(二) 測高曲線的統計意義

為了比較每個集水區的高程分布的差異，本研究使用統計上常用代表資料分布集中趨勢、分散程度、偏斜程度及高峰形狀的四個統計量來表示測高曲線的特性，包含平均數、變異係數、偏態係數(coefficient of skewness)及峰態係數(coefficient of kurtosis)。

此種量化測度曲線型態的方法最早由 Harlin(1978)提出，他以多項式函數來表示測高曲線：

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (1)$$

上式 $F(x)$ 代表測高曲線的相對高度 (h/H)，而 x 代表相對面積 (a/A)。測高曲線積分值(hypsometric curve integral, HI)為曲線下的面積，因此對多項式函數積分即可得

$$\begin{aligned} HI &= \int_0^1 a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n dx \\ &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

其次，我們可以計算 $F(x)$ 對 x 軸的一次矩 (first moment)、二次矩、三次矩及四次矩，分代表隨機變數 X 的期望值或平均值 μ_1 、變異數 μ_2 、偏度(skew) μ_3 及峰度 (kurtosis) μ_4

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{HI} \int_0^1 x \cdot F(x) dx \\ &= \frac{1}{HI} \left[\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{HI} \int_0^1 (x - \mu_1)^2 \cdot F(x) dx \\ &= \frac{1}{HI} \left[\frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n+3} \right] - \mu_1^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{1}{HI} \int_0^1 (x - \mu_1)^3 \cdot F(x) dx \\ &= \frac{1}{HI} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+4} - \frac{3\mu_1}{HI} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+3} + 2\mu_1^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{1}{HI} \int_0^1 (x - \mu_1)^4 \cdot F(x) dx \\ &= \frac{1}{HI} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+5} - \frac{4\mu_1}{HI} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+4} \\ &\quad + \frac{6}{HI} \mu_1^2 \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+4} - 3\mu_1^4 \end{aligned} \quad (6)$$

本研究為推求上述的統計量，利用測高曲線，以其相對高程為隨機變量，相對面積為累積頻率，先將測高曲線轉換成相對高程

的累積分布(CDF)，然後利用多項式迴歸(取 10 次方)，求得其累積分布函數。相對高程之機率密度函數(PDF)則是將 CDF 一次微分後求得。

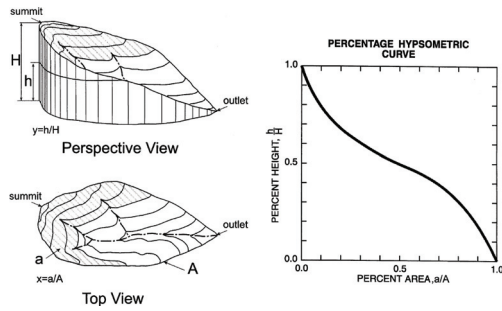


圖 2 集水區地形及其測高曲線關係圖(引用自 Wei Luo,1998)

Figure 2 Sketch of topography of basin and its hypsometric curve (quote from Wei Luo,1998)

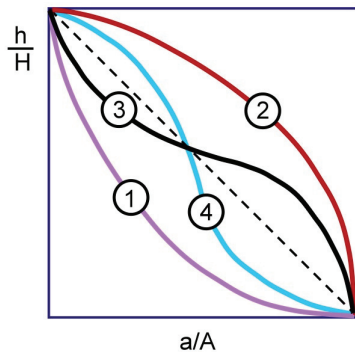


圖 3 測高曲線的型態

Figure 3 Types of hypsometric curve

結果與討論

如前言所述，測高曲線依其形狀通常可分為四種類型：凹形、凸形、S 形及倒 S 形(圖 3)。其中凹形測高曲線表示在地勢較高處，其面積遞增率較小；而在地勢較低處之面積遞增率較大。這種現象在凸形測高曲線則反之，亦即在地勢較高處之面積遞增率較大，而地勢愈低處，其面積遞增率則愈緩。至於

S 形的測高曲線則在地勢較高處呈凹形，在地勢較低處則呈凸形(先凹後凸)，其代表著高處之面積增加率漸大，在中高處其面積增加率約為定值，而低處則面積增加率則漸緩；倒 S 形的測高曲線(先凸後凹)則反之。

進一步來看，由於測高曲線呈現的是不同地勢高低處的集水區面積遞增率的狀況，因此，測高曲線不但受地勢起伏的影響，同時也受集水區形狀的影響。也就是說，即使是均一坡度的斜面(地形起伏特性相同)，如果形狀不同，則其呈現的測高曲線的形狀也會不同。

所以，以下將分別討論地形起伏特性與集水區形狀對測高曲線型態影響。

一、斜面形狀對測高曲線型態之影響

首先，我們利用幾個簡單的地形面，推導其測高曲線中的高度與面積的數學關係，希望藉此釐清上述關係的特性，以下分別就平面坡、凸坡及凹坡探討之：

1. 平面斜坡

(1)矩形斜坡

考慮任意傾角之矩形平面斜坡，如圖 4 所示。圖中斜坡面上之圓點位於相對高程為 h 處，此一高程以上之斜面的水平投影面積為 a (假設矩形在 y 方向為 1 單位)；斜坡面的最大起伏為 H ，整個斜面的水平投影面積為 A 。由三角形的相似特性可以得知：

$$\frac{\tilde{h}}{H} = \frac{a}{A}$$

其中， $\tilde{h} = H - h$ ，因此，

$$\frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H} = \frac{a}{A}$$

$$\frac{h}{H} + \frac{a}{A} = 1$$

亦即，任意傾角之矩形平面斜坡之測高曲線恆為斜率為-1的直線，曲線下面積為0.5，與均勻斜坡的坡度無關。

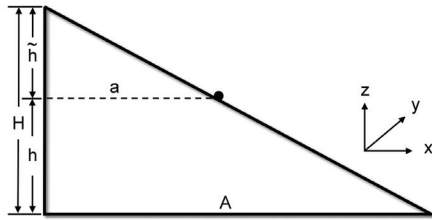


圖 4 矩形斜坡側面圖

Figure 4 Sketch of side view of rectangular slope

(2) 下游端漸縮型斜面

以下考量三種形狀的斜坡：三角形、拋物線形及橢圓形(如圖 5 所示)，在相同斜面坡度及最大起伏量的條件下，比較此三者之測高曲線的差異。由圖 5 可見他們的共同特點為最上游端的寬度最大，愈往下游寬度愈減，至最下游端已束縮成一個點，這一組斜面稱為「下游端漸縮型斜面」。

此三者之最大起伏量均為 500，坡度為 0.5。由其測高曲線圖(如圖 6 所示)可以看出，此三者的曲線型態均為凸型，測高曲線積分(曲線下面積)的大小比較：三角形斜面(0.6714) > 拋物線斜面(0.6048) > 橢圓形斜面(0.5806)。

以上的結果不難發現，此三者的測高曲線及測高曲線積分不同是因為形狀的束縮程度的不同所致。就形狀的束縮程度而言，三角形最快，其次為拋物線，最小者為橢圓形。也就是說，三角形斜面的面積遞增率(隨著高程減低)會最快減小，而其次為拋物線，

最慢者為橢圓形斜面(如圖 6)。

另外，如果我們以相對高程(h/H)為隨機變數，由其累積分布函數推求各個形狀的斜面的機率密度函數曲線(如圖 8 所示)，機率密度函數係由累積分布函數一次微分而得，而由於累積分布函數係由多項式迴歸後得到，而迴歸時考量資料的最佳配適條件，因此並未限制端點條件(註：當 $h/H = 0$ 時，理論上 CDF 應該為 0，而 $h/H = 1$ 時，CDF 應該為 1)，因此，在曲線端點之處常會出現不太合理的情形，這種情形在微分後的 PDF 特別明顯，如圖 8 及圖 11 中曲線在接近端點處不自然的突起的現象。由該圖也可以看到，當 h/H 大約為 0.6 時，三者的機率密度約略相等，而 $h/H < 0.6$ 時，三者的機率密度的大小分別為：橢圓 > 拋物線 > 三角形；而 $h/H > 0.6$ 時，這三者的關係則反之：三角形 > 拋物線 > 橢圓。因為， h/H 的機率密度為 h/H 累積分布的斜率，其意義等同於面積遞增率，因此利用機率密度函數曲線也可用來比較面積遞增率隨相對高程的變化情形。



三角形斜面	拋物線斜面	橢圓形斜面
A=399,999	A=533,667	A=628,286
Slope=0.5	Slope=0.5	Slope=0.5
HI=0.6714	HI=0.6048	HI=0.5806

圖 5 三個下游端漸縮型斜面，其最大起伏及坡度相同但形狀互異

Figure 5 The sketch of three gradually downstream-ward contracted slopes

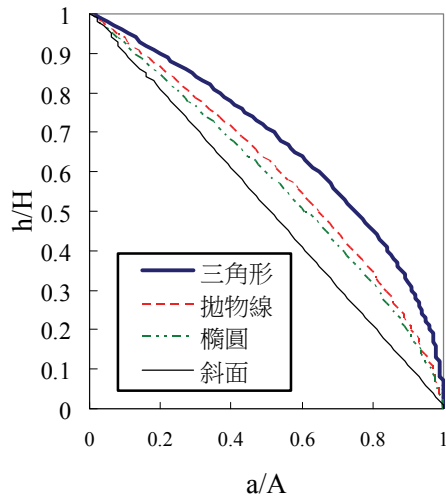


圖 6 漸縮型斜面之測高曲線
Figure 6 Hypsometric curve of gradually downstream-ward contracted slope

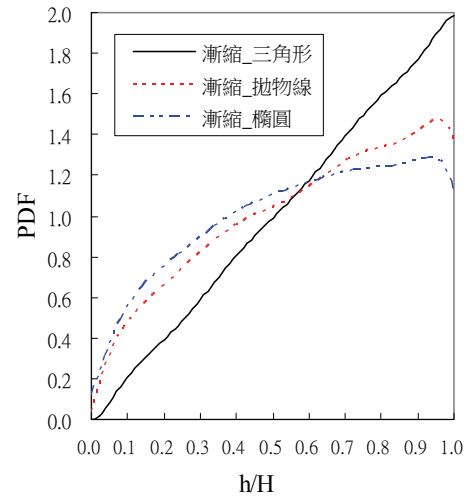


圖 8 下游端漸縮型斜面相對高程之機率密度曲線
Figure 8 The PDF curve of relative elevation of the gradually downstream-ward contracted slope

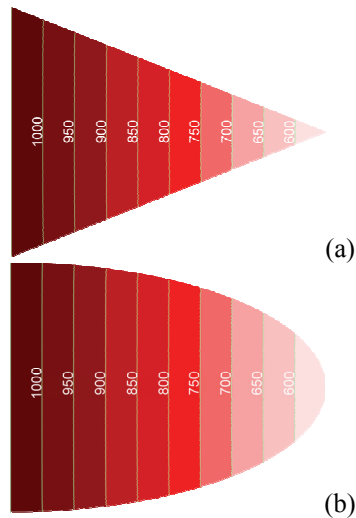


圖 7 三角形(a)與橢圓形(b)斜面的面積遞增率，前者由上游至下游的束縮程度較為快速，因此往下游的面積遞增率漸減(註：圖中以不同顏色代表高程變化，直線為等高線，數字為相應之高程)

Figure 7 Area gradual increasing rate of triangle and ellipse shape slope

(3) 下游端漸擴型斜面

在此一小節中考慮另一種下游端的寬度比上游端大的斜面型態，稱之為「下游端漸擴型斜面」(圖 9)。此三者之最大起伏量均為 500，坡度為 0.5，其測高曲線如圖 10 所示。

如圖 10 所示，三者之測高曲線的型態均為凹形，測高曲線積分的大小比較：橢圓形(0.4294)>拋物線(0.4051)>三角形(0.3386)。這一組斜面的測高曲線的差異也是受到斜面漸擴程度快慢的影響。

下游端漸擴型斜面之測高曲線呈凹型(圖 10)，與下端漸縮型斜面之凸型(圖 6)在型態上有很大的差別。如果分析此二者之機率密度曲線(圖 8 及圖 11)，可以發現，凹型測高曲線之機率密度隨 h/H 的增加而減小(即面積增加率愈來愈小)，而凸型測高曲線之機率

密度則隨 h/H 的增加而增加(即面積增加率愈來愈大)。

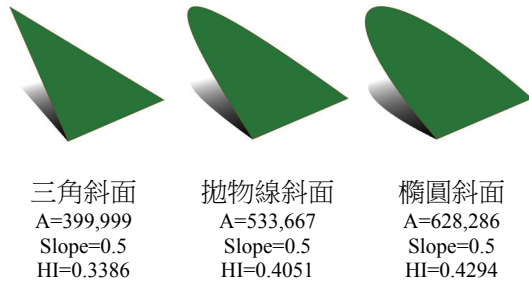


圖 9 三個下游端漸擴型斜面，其最大起伏及坡度相同但形狀互異

Figure 9 The sketch of three gradually downstream-ward expanded slopes

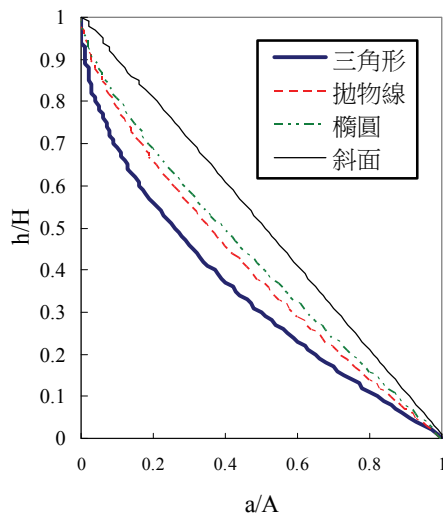


圖 10 漸擴型斜坡面之測高曲線

Figure 10 Hypsometric curve of gradually downstream-ward expanded slope

(4) 先擴後縮型斜面之面積-高度曲線
一般集水區地形的演化，由於主支溝形成的順序及側向擴展的速度的不同，通常塑造形成的流域具有鵝蛋的外形(錢寧等人，1987)。因此在此一小節，我將前面提到兩種型態一下游端漸縮型斜面及下游端漸擴型

斜面加以合併，而產生較符合集水區外型的一組斜面，稱之為「先擴後縮型斜面」。

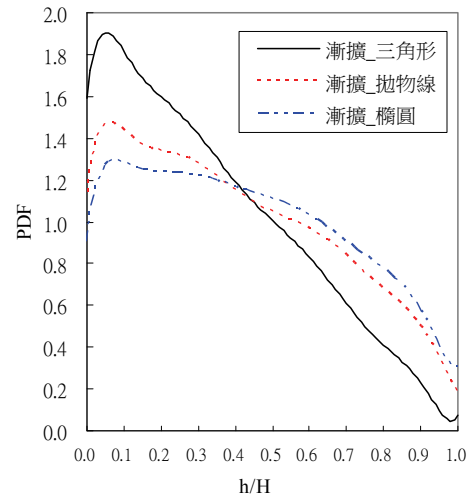


圖 11 下游端漸擴型斜面相對高程之機率密度曲線

Figure 11 The PDF curve of relative elevation of the gradually downstream-ward expanded slope



圖 12 三個下游端漸擴型斜面

Figure 12 The sketch of three gradually downstream-ward contracted and expanded slopes in order

圖 12 為先擴後縮型斜面之測高曲線，很明顯地，這一組測高曲線兼具了下游端漸擴型及下游端漸縮型二者測高曲線型態的特性，而呈現先凹後凸的曲線特性。另外，如前所述，若測高曲線為凹形，則其高程之機率密度曲線為一單調漸減的曲線；而若測高曲線為凸形，則其機率密度曲則為單調漸增的曲線。因此，對於先擴後縮型斜面而

言，由於其測高曲線為先凹($h/H > 0.5$)後凸($h/H < 0.5$)，所以其機率密度曲線先單調上升($h/H < 0.5$)再單調下降($h/H > 0.5$) (如圖 13 所示)。

另外，雖然這三個先擴後縮型斜面之測高曲線的形狀不太相同，然而其測高曲線積分皆為 0.505，與前面討論的矩形斜面的測

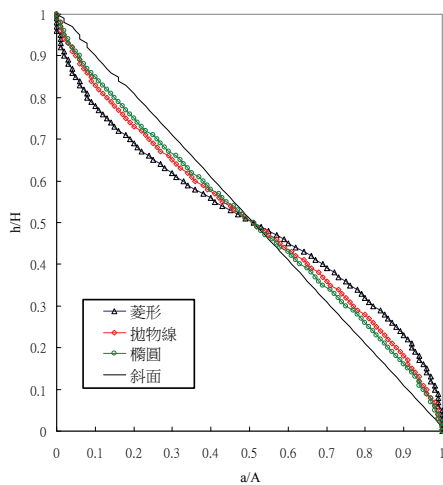
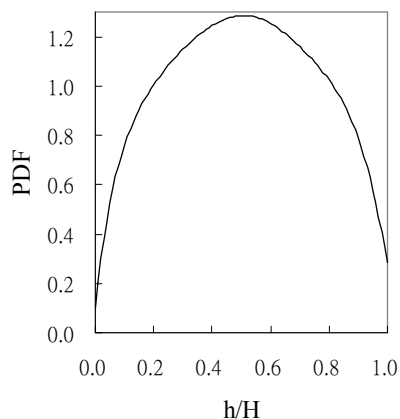
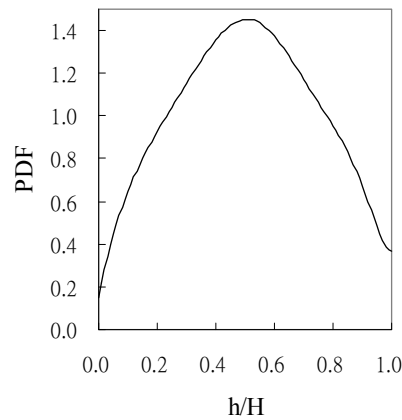


圖 13 先擴後縮型斜面之測高曲線，測高曲線積分值皆為 0.505

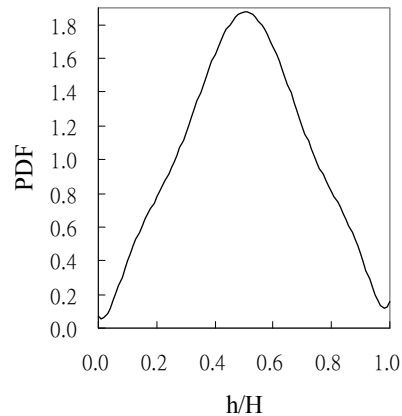
Figure 13 Hypsometric curve of gradually downstream-ward contracted and expanded in order slopes



(a)橢圓形斜面/偏態係數：-0.0013；峰態係數：2.0033



(b)拋物線斜面/偏態係數：-0.0007；峰態係數：2.1370



(c)菱形斜面/偏態係數：0.0039；峰態係數：2.4127

圖 14 相對高程 h/H 之密度函數(PDF)曲線
(a)橢圓面、(b)拋物面及(c)菱形面

Figure 14 PDF of relative elevation h/H for three gradually downstream-ward contracted and expanded in order slopes

高曲線積分的理論值 0.5 相近。事實上，兩者應該相等，只不過前者為實驗結果，在計算高度面積關係的過程中，由於求算面積的小數點位數選擇產生的誤差所致。

此一結果顯示，對於斜坡面而言，如果上、下游端為發散的形式(如前述之下游端漸

縮型或下游端漸擴型)，則不但測高曲線會呈現凸形或凹形(註：此時測高曲線的形狀與集水區為幼年期地形或老年期地形無關)，而且測高曲線積分也會與矩形斜面的理論值相

差很大。而如果斜面屬於上、下游端收斂的形式(即本文所稱的先擴後縮型)，則測高曲線呈現 S 型，而且測高曲線積分會接近於斜面的理論值。

2 凸坡

在本節中我們討論凸坡的測高曲線及測高曲線積分的特性。為了方便討論起見，本文使用二次曲線函數來建構其測高曲線的理論型態，及測高曲線積分的理論值。

假設凸坡的斷面為二次曲線的型式，即表 1 各類型斜面之測高曲線積分之比較

Table1 Hypsometric integral for every type slope

下游端漸縮型 斜面		下游端漸擴型 斜面		先擴後縮型 斜面	
形狀	HI	形狀	HI	形狀	HI
三角形	0.6714	三角形	0.3386	菱形	0.5050
拋物線	0.6048	拋物線	0.4051	拋物線	0.5050
橢圓	0.5806	橢圓	0.4294	橢圓	0.5050

$$y_1 = c - bx_1^2, \quad x_1 \text{ 的範圍為 } 0 \sim \sqrt{c/b}。$$

另從坡頂至坡趾處畫一直線，在符合前述的範圍，所以直線的斜率為 \sqrt{cb} ，因此直線的方程式為： $y_2 = c - \sqrt{cb}x_2$ (如圖 15(a)所示)。因此，由這兩條曲線分別可得：

$$x_1 = \sqrt{\frac{c - y_1}{b}}, \text{ 及}$$

$$x_2 = \frac{c - y_2}{\sqrt{cb}}$$

則當 $y_1 = y_2 = h_i$ 時，可得

$$\Delta a_i = x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{c - h_i}{b}} - \frac{c - h_i}{\sqrt{cb}} = \frac{h_i}{\sqrt{cb}} - \frac{\sqrt{c - h_i}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

其次，由圖 15(a)中可以看出，其幾何關係為

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{A} &= \frac{a'_i}{A} + \frac{\Delta a_i}{A} = \\ (1 - \frac{h_i}{c}) &+ \frac{\frac{h_i}{\sqrt{cb}} - \frac{\sqrt{c - h_i}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}}{\sqrt{c/b}} = \\ (1 - \frac{h_i}{c}) &+ \frac{h_i}{c} + \sqrt{1 - \frac{h_i}{c}} - 1 = \sqrt{1 - \frac{h_i}{c}} \end{aligned}$$

因此，可得

$$\frac{a_i}{A} = \sqrt{1 - \frac{h_i}{H}}, \text{ 或}$$

$$\frac{h_i}{H} = 1 - \left(\frac{a_i}{A}\right)^2$$

即二次曲線型式凸坡之測高曲線恆為凸形二次曲線，其曲線下面積(即測高曲線積分)為 0.667，與凸坡的曲率無關(即 b 及 c 可以為任意值)。

3. 凹坡

假設凹坡為二次曲線，即

$y_1 = b(x_1 - \sqrt{c/b})^2$ 。而由坡頂至坡趾處畫一斜線，斜率為 \sqrt{cb} ，其方程式為

$y_2 = -\sqrt{cb}x_2$ 。因此，由這兩條曲線分別可得：

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{b}} - \sqrt{\frac{y_i}{b}}, \text{ 及}$$

$$x_2 = \frac{c - y_2}{\sqrt{cb}}, \quad (y < c)$$

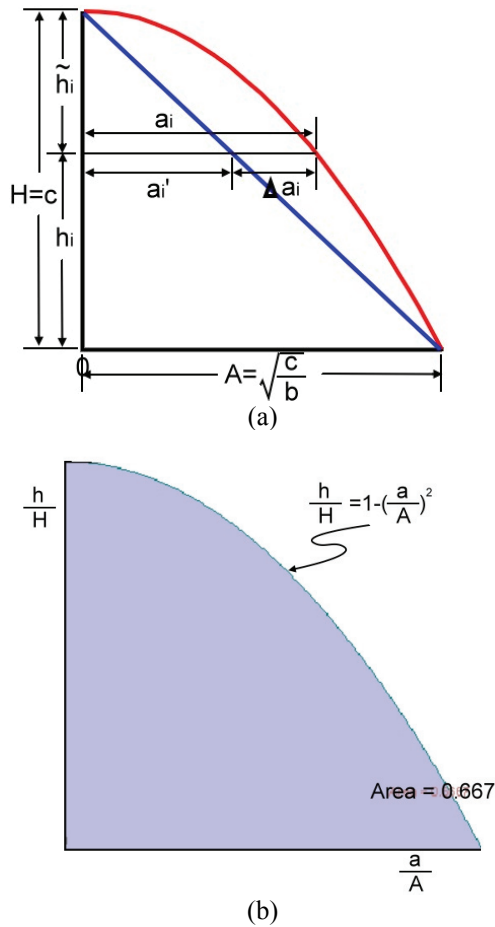


圖 15 二次曲線凸坡的剖面圖(a)及其測高曲線(b)

Figure 15 Sketch of side view of convex slope with 2nd degree curve shape and its corresponding hypsometric curve

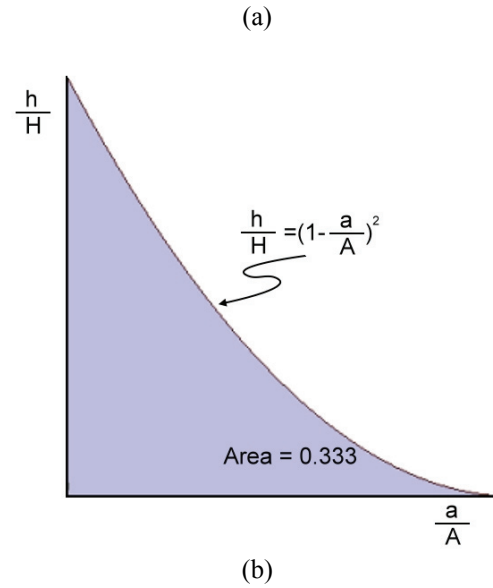
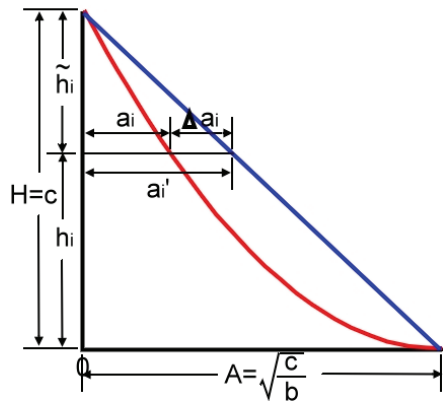


圖 16 二次曲線凹坡的剖面圖(a)及其測高曲線(b)

Figure 16 Sketch of side view of concave slope with 2nd degree curve shape and its corresponding hypsometric curve

則當 $y_1 = y_2 = h_i$ 時，可得

$$\Delta a_i = x_2 - x_1 = \frac{c - h_i}{\sqrt{cb}} - \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{h_i}}{\sqrt{b}} \right)$$

其次，由圖 16 中可以看出，其幾何關係為

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{A} &= \frac{a_i'}{A} - \frac{\Delta a_i}{A} = \\ \left(1 - \frac{h_i}{c} \right) + \frac{\sqrt{h_i/b} - \sqrt{h_i/b}}{\sqrt{c/b}} &= \\ \left(1 - \frac{h_i}{c} \right) - \sqrt{\frac{h_i}{c}} + \frac{h_i}{c} &= 1 - \sqrt{\frac{h_i}{c}} = 1 - \sqrt{\frac{h_i}{H}} \end{aligned}$$

因此，可得

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{A} &= 1 - \sqrt{\frac{h_i}{H}}, \text{ 或} \\ \frac{h_i}{H} &= \left(1 - \frac{a_i}{A} \right)^2 \end{aligned}$$

即凹坡之面積－高度曲線恆為二次曲線，曲線下面積為 0.333，與凹坡的曲率無關(即 b 及 c 可以為任意值)。

二、不同切蝕程度地形的測高曲線

斜坡面的型態通常係由水流向下切蝕後所形成。在本節中我們模擬單一平整斜坡隨著切蝕程度加劇所成之地形，其表現在測高曲線型態上的變化的狀況。

如圖 17 所示，原來的單一斜坡坡度為 0.5，後經切蝕後，沿著原來的斜坡面傾斜的方向形成一條蝕溝。為方便討論，蝕溝的位置出現在單一斜面的中間，而蝕溝的兩側則出現相向的兩片斜面。另外，假設上下游端的切蝕深度相同，因此每一個切蝕地形的蝕溝坡度皆與原來的單一斜坡坡度一樣。這兩片因切蝕的斜面由於對稱的關係，其斜面坡度 S_s 相同， S_s 愈大表示原來的單一斜面受到切蝕的程度愈大。在此一案例中，分別比較 S_s 等於 0.2、0.3、0.4、0.5 及 1.0 等情況，其切蝕地形的最大起伏量分別為 600、650、700、750 及 1000。

由前節的討論，我們不難知道單一斜坡的測高曲線為斜率-1 的直線，而由圖 18 也可以看出，切蝕地形的測高曲線會呈現先凹 ($a/A < 0.5$) 後凸 ($a/A > 0.5$) 的情形，而且隨著切蝕程度變大(即蝕溝兩側斜坡坡度愈大)，其地形的測高曲線與斜率為-1 的直線的距離也會變得愈來愈大(僅在 $a/A = 0.5$ 時會出現重疊)，亦即測高曲線的曲率會出現變大的情形。

對未受切蝕的斜面而言，其測高曲線呈直線的型態，測高曲線積分值為 0.5。若以相

對高度為隨機變數，則該地形的相對高度的累積分布曲線可以 $F(x) = x$ 來表示，因此其

密度函數為 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 1$ ，亦即無論相對

高度為任何值，其機率密度函數為一固定值，這表示此一地形之面積遞增率與高程無關(一般而言，集水區的上游的地形比較陡峻，下游比較平緩，因此，在集水區的上游地區，相鄰一個單位高程所圍的集水區的水平投影面積將比集水區下游地區來得小)。

然而，切蝕的斜坡地形的測高曲線就不再是斜率-1 的直線，而是先凹後凸、中間可能有一段略呈線性的曲線。如前所述，測高曲線為凹形表示面積遞增率(或高程的機率密度函數)愈來愈大；若為直線則表示面積遞增率(或高程的機率密度函數)為定值；而若為凸形則表示面積遞增率(或高程的機率密度函數)愈來愈小。所以，由圖 19 的相應切蝕地形高程之機率密度曲線圖中可以看到每一條機率密度曲線都是先單調遞增，後單調遞減，有些在中間段則出現約略呈水平狀。

出現上述現象的原因可用圖 20 加以說明。未受切蝕的斜面，其等高線應為一組平行直線，而在切蝕後之地形，其等高線則成一組「 \angle 」字形的折線，切蝕愈深，「 \angle 」字形的夾角愈小。圖 20 為 $S_s = 0.2$ 的切蝕地形的數值高程，在這個區域的最低高程為 450，最大高程為 1050，圖中的兩條等高線 550 及 950 將整個區域分成 A、B 及 C 等三個部分，圖中藍色的箭線代表蝕溝的位置及地勢高低方向。首先，A 區為三角形區域，由圖 20 中可以看出，在這個區域相鄰等高線所圍的面積會隨高程的增加而增加，因此在

這個部分的面積遞增率會(隨著高程的增加)而愈來愈大。其次，B 區的形狀為二個平行四邊形所成的區域，在這個區域相鄰等高線所圍的面積均相等，也就是說，面積遞增率不隨高程的增加而改變。最後 C 區的部分由二個三角形組成，與 A 區相反地，在 C 區內相鄰等高線所圍的面積隨高程的增加而減小，亦即，面積遞增率隨高程的增加而愈來愈小。

另外，由圖 18 可以看出，測高曲線明白地顯示切蝕後地形的差異，然而這些曲線分別在 $a/A < 0.5$ 及 $a/A > 0.5$ 的兩個部分相對於斜率為-1 的直線具對稱性，因此這些測高曲線的積分值均為 0.5。也就是說，測高曲線積分值在此並無法反應切蝕後地形的差異，因此我們必需端詳各個切蝕地形的測高曲線的型態的差異。

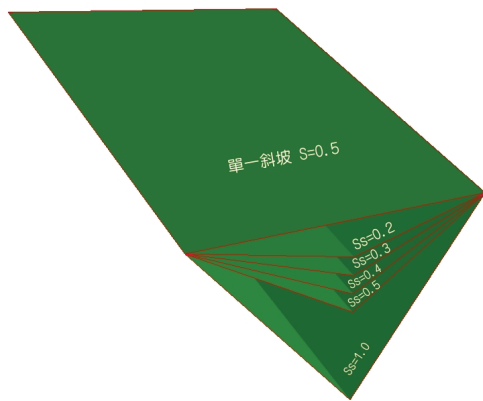


圖 17 各種切蝕程度的坡面地形
Figure 17 Sketch of incised topography of some different incision depth

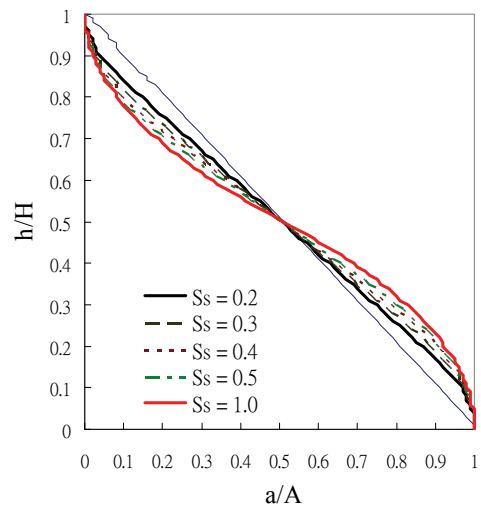


圖 18 不同切蝕深度斜面之測高曲線
Figure 18 Hypsometric curve for incised morphology with different incision degree

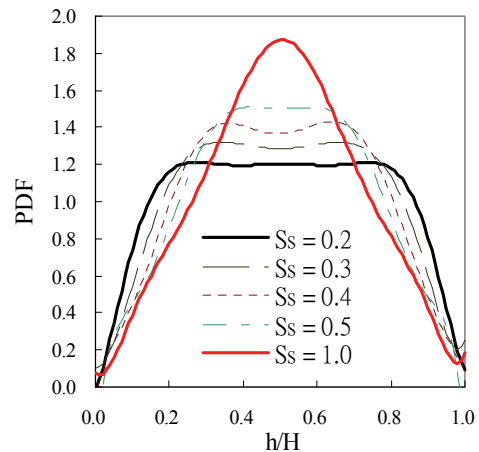


圖 19 切蝕地形面相對高程之機率密度函數
Figure 19 PDF for the relative height of each incised morphology

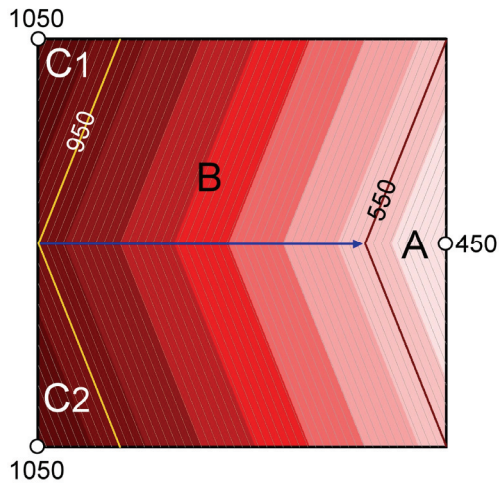


圖 20 切蝕地形之面積遞增率隨高程變化之說明圖

Figure 20 Sketch of plain view of incised morphology to explain how the area increasing rate change with elevation

三、源頭後退與測高曲線型態之關係

在本節中討論切蝕地形向源頭侵蝕的情況所形成的測高曲線及其測高曲線積分的變化。

本研究中，向源侵蝕的程度是以源頭斜面的坡度 S_o 來表示， S_o 愈大者，表示向源侵蝕的程度愈嚴重。在本研究中設定四種向源侵蝕的程度，分別為 $S_o=0.7$ 、 $S_o=0.8$ 、 $S_o=1.0$ 及 $S_o=1.2$ 。而承襲前面的討論，在此亦以菱形、拋物形及橢圓形來表現集水區的形狀(圖 21)，藉此探討集水區形狀的影響。

圖 22 顯示橢圓形集水區的四種向源侵蝕程度所成地形的測高曲線，這一組曲線大體上皆屬於先凹後凸型，而這四條曲線大約在 $h/H > 0.55$ 以上有明顯的差異，而在 $h/H < 0.55$ 則皆相同。此一現象說明了向源侵蝕地形呈现在測高曲線的型態上僅在超過某一高程才有影響，而且向源侵蝕愈嚴重

的地形，其呈現出來的測高曲線在某一高程以上愈彎曲，這是因為其面積遞增率較小的

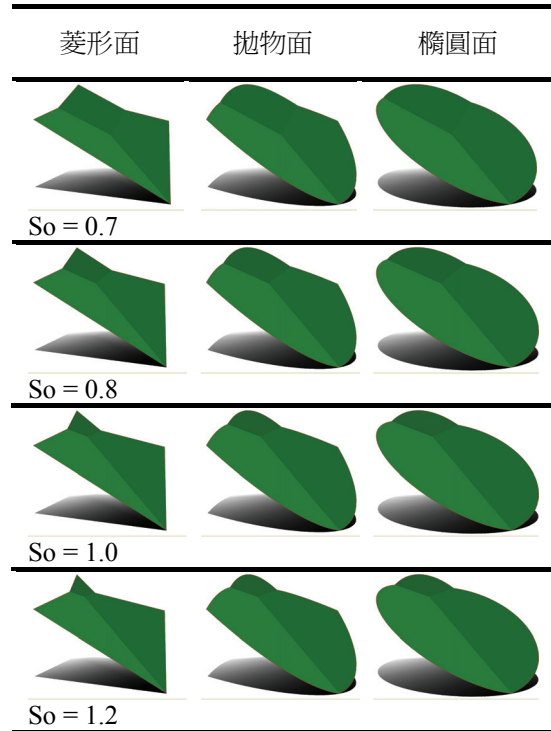


圖 21 各種向源侵蝕程度及集水區形狀的簡易地形

Figure 21 Sketch of headward erosion topography with different basin shapes

表 2 不同向源侵蝕程度及不同集水區形狀之地形的測高曲線積分

Table 2 Hypsometric curve integral for several headward erosion topography with different basin shapes

形狀 源頭 坡度	橢圓面	拋物面	菱形面
0.7	0.4952	0.4839	0.4816
0.8	0.4888	0.4823	0.4743
1.0	0.4838	0.4771	0.4698
1.2	0.4819	0.4752	0.4684

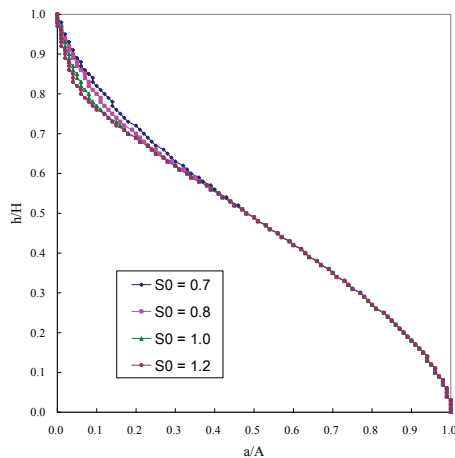


圖 22 橢圓形集水區源頭後退測高曲線變化情形 S_0 表源頭上游斜坡坡度

Figure 22 Hypsometric curve of ellipse shape basin for four types of headward erosion

緣故。因此，如表 2 所示，向源侵蝕愈嚴重者(即源頭坡度愈大)，其測高曲線積分愈小，表示其愈接近老年期地形。

結 論

測高曲線與測高曲線積分值並非一對一的對應關係，不同型態的測高曲線可能具有相同的測高曲線積分值。

本文藉由對許多簡單虛擬地形的研究發現集水區形狀、切蝕程度及向源侵蝕等幾種地形演變的機制探討在地形變遷的過程當中，其表現在測高曲線的型態上及測高曲線積分值上的變化特性。

對於形狀而言，本研究推導矩形斜面相對高程與相對面積的關係為斜率-1 的直線，測高曲線積分為 0.5，其結果與斜面的坡度無關。然而對於非矩形的漸縮形狀，其對應的測高曲線的型態卻為凸形，測高曲線積分大於 0.5，而漸擴的形狀的測高曲線的型態為凹形，測高曲線積分小於 0.5；而對於

先擴後縮的形狀，測高曲線則為 S 形，測高曲線積分皆為 0.5，此結果顯示形狀在面積遞增率隨高程變化上產生的影響。

對於切蝕而言，切蝕地形的測高曲線會呈現先凹($a/A < 0.5$)後凸($a/A > 0.5$)的情形，而且隨著切蝕程度變大(即蝕溝兩側斜坡坡度愈大)，其地形的測高曲線與斜率為-1 的直線的距離也會變得愈來愈大測高曲線的曲率會出現變大的情形。

最後，考慮向源侵蝕所成地形的測高曲線，大體上亦屬於先凹後凸型，比較四個不同向源侵蝕程度的地形的測高曲線，顯示這四條曲線僅在超過某一高程才有差別，某一高程以下，因地形不受向源侵蝕影響，所以該部分的曲線出現重合的現象。而且向源侵蝕愈嚴重的地形，在某一高程以上，因為其面積遞增率較小的緣故，其呈現出來的測高曲線愈彎曲。而且向源侵蝕愈嚴重者，其測高曲線積分愈小，表示其愈接近老年期地形。

參考文獻

1. 錢寧、張仁、周至德，(1987)，「河床演變學」，科學出版社，第 18 頁。
2. Harlin, John M. (1978), "Statistical moments of the hypsometric curve and its density function," *Mathematical Geology* 10, pp. 59~72.
3. Hurtrez J.E., C. Sol and F. Lucazeau (1999), "Effect of Drainage Area on Hypsometry from an Analysis of Small-scale Drainage Basins in the Siwalik Hills (Central Nepal)," *Earth Surf. Process. Landforms* 24, pp.799~808.

4. Strahler, A. N.(1952), "Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography,". *Computers & Geosciences* Vol. 24, No. 8, pp. 815~821,
Bulletin of the Geological Society of America 63 (1), pp. 1117~1141.
 5. Wei Luo (1998), "Hypsometric analysis with a geographic information system"
-
- 98年11月10日收件
98年11月11日修改
98年11月11日接受

水土保持學報 42(1)：49-64 (2010)

Journal of Soil and Water Conservation, 42(1)：49-64 (2010)