

植生工程根系力學試驗之數值分析

林德實⁽¹⁾ 王勝賢⁽²⁾ 林信輝⁽³⁾

摘 要

本研究先探討具代表性之根系力學模式及相關力學試驗後，再採用二維平面應變有限元素法數值工具，對各類型根系力學試驗之土~根互制行為進行模擬分析。由分析結果及實務應用之目的觀之，各類型土~根直剪試驗之數值模擬預測結果與實際試驗量測成果之吻合度相當良好。因此，本文所提之力學試驗數值模擬程序及根系材料參數轉換方法二者之有效性可獲得確認。此外，文中所建議之各種計算技巧，預期將可確實反應全尺寸含根邊坡穩定性定量分析中之根系加勁效果。

(**關鍵字**：有限元素分析、土~根試樣、模擬程序)

Numerical Analyses of Mechanical Experiments in Root Mechanics of Vegetation Engineering

Der-Guey Lin⁽¹⁾, Sheng-Hsien Wang⁽²⁾, Shin-Hwei Lin⁽³⁾

Associate Professor⁽¹⁾, Professor⁽³⁾ and Graduate Student⁽²⁾, Department of Soil and Water Conservation, National Chung-Hsing University, Taichung, Taiwan 402.

ABSTRACT

This study systematically surveys the representative mechanical models and relevant mechanical experiments of root system from previous researches. Based on the aforementioned database, a series of two dimensional plane strain finite element analyses were performed to simulate the interaction behavior of soil~root sample from various types of mechanical experiments. It can be observed that the numerical predictions are reasonably coincident with those from the actual measurements from the standpoint of practice. Accordingly, for numerical simulations of mechanical experiment of soil~root samples, the validities of the proposed simulation procedure and conversion techniques of root system can be verified. In addition, it is expected that the various computation schemes proposed by this paper can be employed to reflect the realistic responses of reinforcement of root system in full-scale stability analyses of vegetated slope.

(**Key Words**: Finite Element Analyses, Soil~Root Sample, Simulation Procedure)

(1) 國立中興大學水土保持學系副教授

(2) 國立中興大學水土保持學系碩士在職專班研究生

(3) 國立中興大學水土保持學系教授

前言

1.1 研究目的

傳統在實驗室內或野外現地進行之根系拉拔(pull-out test) 試驗或直剪(direct shear test)試驗時, 試驗前之試體準備及試坑開挖整修, 耗時又費力, 而且試體常會受到相當之擾動或破壞。因此, 本研究期望透過既有根力模式及數值分析方法, 發展一套數值程序來模擬實驗室及現地各種根系力學實驗之應力及變形行為。並藉由數值模擬結果與試驗量測結果之比較來確認數值程序之可靠性及準確度。由於數值模擬程序之可重覆性, 因此根系力學試驗中之各種試驗變數如根系參數(生長密度、長度、直徑及抗拉強度)、土壤參數(單位重、凝聚力及摩擦角)及加載參數(荷重速率、應變速率及覆土垂直正向應力)可經由標準之數值模擬程序逐一進行有系統的檢核而不必透過冗長繁瑣的根系力學試驗。

1.2 研究範圍

本研究首先彙整過去根系力學模式之相關理論及試驗成果, 再針對各式典型力學試驗進行數值模擬。最後, 再將模擬計算值與試驗量測值進行比較, 以驗證本研究所提數值模擬程序之有效性及可靠度, 並為全尺度(full-scale)含根邊坡土~根力學互制行為之分析, 建立良好的自信。本研究採用二維有限元素法(finite element method) 分析程式作為數值工具, 而數值模擬之項目, 包含室內及野外無根及含根試樣之直接剪力試驗。

根系力學模式

2.1 根系加勁土壤剪力強度增量公式

一般根力模式大都依據摩爾-庫倫破壞

準則 (Mohr-Coulomb failure criterion) 及有效應力(effective stress)理論來進行推導。若土壤內含有根系, 且假設根系不影響土壤有效內摩擦角 ϕ' , 則根系能提供土壤的剪力強度增量 ΔS_r , 可視為根凝聚力(由於根系額外增加之凝聚力), 則含根土壤 (root permeated soil)之剪力強度 S_r 可表為:

$$S_r = c' + \Delta S_r + \sigma' \tan \phi' \quad (1)$$

2.1.1 垂直根系剪力帶之根力模式

T. H. Wu (1976, 1979, 1988) 假設根系垂直通過厚度為 Z 之剪力帶 (shear zone), 如圖一所示, 並錨碇於剪力帶另一端土壤中, 而所有根株的拉力強度均能在受剪時完全發展, 且受拉力作用之根系僅會被拉斷而不致被拉拔(pull-out) 出來。當上部土體承受一剪位移 X , 則根與剪力帶之法線方向呈 β 角。纖維由變形至拉斷所發展的拉力強度 T_r 可分解為剪力帶上之正切應力 T_t 及正向應力 T_n 。這些作用應力將轉換成剪應力阻抗的增加量 (或稱為根力), 即為根系提供土壤剪力強度的增量 ΔS_r 。在土體中 N 點上方之根拉力, 施加於 N 點時, 根系加勁土壤的抗剪強度可表為:

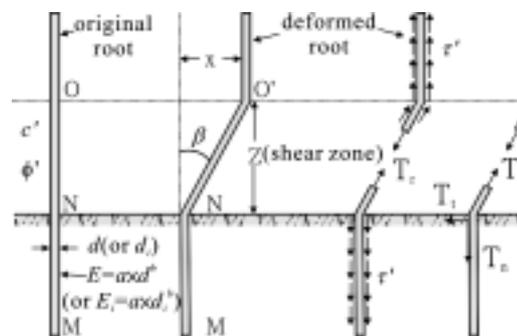


圖 1. 垂直根系之受剪模式示意

Figure 1. Illustration of shearing model of vertical root system.

$$S_r = C' + \frac{A_r}{A_s} T_r (\sin \beta + \cos \beta \tan \phi') + \sigma_n' \tan \phi' \quad (2)$$

比較(1)式與(2)式，土壤剪力強度增量為：

$$\Delta S_r = \frac{A_r}{A_s} T_r (\sin \beta + \cos \beta \tan \phi') \quad (3)$$

式中 A_r 為受剪面上根系之總斷面積， A_s 為受剪面面積， T_r 為受剪面上根系之平均拉力強度。可定義 T_r 為：

$$T_r = t \frac{A_r}{A_s} \quad (4)$$

式中， t 為單根之拉力強度， A_r 可由根系各種等級根徑（例如 i 等級根徑）之根數 n_i 與其根斷面積 a_i 乘積的總和（ $i=1 \sim n$ ，共有 n 種等級之根徑）求得。Gray et al. (1981) 建議採用根系各種等級根徑之拉力強度 T_i ，表示如下：

$$\Delta S_r = \left[\sum_{i=1}^n T_i \frac{n_i a_i}{A_s} (\sin \beta + \cos \beta \tan \phi') \right] \quad (5)$$

根據 Waldron (1977) 以直剪儀試驗各種含根土壤之剪力強度，其根折角 β 設定在 $40^\circ \sim 50^\circ$ 之間。T. H. Wu (1976) 觀察崩塌地現場的 β 角，其值多在 $45^\circ \sim 70^\circ$ 之間。因此， β 角之理論值應在 $40^\circ \sim 70^\circ$ 之間。而土壤有效內摩擦角在 $20^\circ \sim 40^\circ$ 之間。因此，(5)式中 $(\sin \beta + \cos \beta \tan \phi')$ 項之範圍值應在 $0.92 \sim 1.31$ 之間，平均值為 1.115 ，可取為 1.12 。最後(5)式可表為：

$$\Delta S_r = 1.12 \sum T_i \frac{n_i a_i}{A_s} \quad (6)$$

2.1.2 傾斜根系剪力帶之根力模式

在傾斜根系方面，則假定根系與地面水平線成一 ψ 角，如圖二所示。此時，含根土壤之剪力強度增量可改寫為：

$$\Delta S_r = T_r [\sin(90 - \psi) + \cos(90 - \psi) \tan \phi'] \quad (7)$$

$$\text{式中 } \psi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{k + (\tan \phi')^{-1}} \right), \quad k = X/Z$$

2.1.3 考慮土~根相對滑移或根系斷裂情況之根力模式

1. 土~根間未發生相對滑移且根系未斷裂之情況

Waldron (1977) 及 Waldron and Dakessian (1981) 設定 ΔS_1 為根系受剪伸長所增加的抗剪強度，再依(3)式可將剪力強度增量表為：

$$\Delta S_r = \frac{A_r}{A_s} T_N \delta \quad (8)$$

其中， $\delta = (\sin \beta + \cos \beta \tan \phi')$ ， $T_N = k \gamma$ ， $k = (4\tau' E Z / d)^{1/2}$ ， $\gamma = (\sec \beta - 1)^{1/2}$ ， E 為根系之楊氏模數， d 為根徑， Z 為剪力帶厚度， τ' 為土~根界面間之摩擦力。因此，可將(8)式再表為：

$$\Delta S_1 = \frac{A_r}{A_s} k \gamma \delta \quad (9)$$

將根斷面積比 (A_r/A_s) 與剪位移 (X) 固定，可發現 ΔS_1 正比於 $d^{-1/2}$ 。因此，在根系總斷面積 A_r 相同之情況下，根徑愈小時產生的土壤加勁效果愈大。再將根系 n 支根之總斷面積 $A_r (=n\pi d^2/4)$ 代入(9)式，可得：

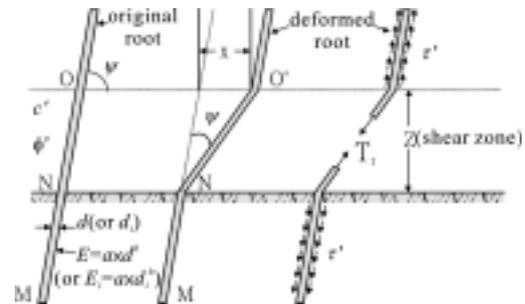


圖 2. 傾斜根系之受剪模式示意

Figure 2. Illustration of shearing model of inclined root system.

$$\Delta S_1 = \frac{n\pi d^{\frac{3}{2}} \times \gamma \times \delta}{2A_s} \sqrt{(\tau' \times E \times Z)} \quad (10)$$

(10)式顯示，根系在具有相同根數 n 之條件下， ΔS_1 正比於 $d^{3/2}$ 。假設有 m 種等級的根徑，而 n_i 為 i 等級根徑之根數， E_i 為 i 等級根徑之楊氏模數，則(10)式可表為：

$$\Delta S_1 = \left[\pi(\tau' Z)^{1/2} \gamma \delta / 2A_s \right] \sum_{i=1}^m E_i^{1/2} n_i d_i^{3/2} \quad (11)$$

2. 土~根間發生相對滑移之情況

在含根土壤之剪斷過程中，若根系與土壤間發生相對滑移，根系依然可對土壤提供加勁效果。因此，針對單根發生瞬間滑移時，所能提供的最大抗拉力可表為：

$$T_N = 2\tau' L / d \quad (12)$$

其中， L 為根長。將(12)式及 $A_r (=n\pi d^2/4)$ 代入(8)式中，可得 n 支根發生滑移時所能提供的剪力強度增量：

$$\Delta S_2 = \pi\tau' n L d \delta / 2A_s \quad (13)$$

假設發生滑移之根共有 j 種等級之根徑，而 n_i 及 L_i 分別為具有 i 等級根徑 d_i 之根數及根長，此時(13)式可表成：

$$\Delta S_2 = \left[\pi\tau' \delta / 2A_s \right] \sum_{i=1}^j n_i L_i d_i \quad (14)$$

3. 根系發生斷裂之情況

在含根土壤剪斷過程中，根所產生的抗拉力 T_N 達到極限破壞拉力 T_f 時，根系對土壤的加勁效果可能會損失。根系發生斷裂時 ($T_N = T_f$)，(14)式中之根長 $L (=L_i)$ ，依(12)式可表為 l_f ：

$$l_f = T_f d / 2\tau' \quad (\text{當 } T_N = T_f \text{ 時 } L = l_f) \quad (15)$$

式中， l_f 為根系發生斷裂時所需之至少入土錨碇長度。若 L 為實際根長，則當 $L > l_f$ (錨碇長度足夠)時，即表示根系可能發生斷

裂；反之， $L < l_f$ (錨碇長度不足)時則表示土~根間將發生相對滑移而非根系斷裂。

4. 土~根間相對滑移及根系斷裂根力模式之應用

為了決定根系受力伸長所增加之土壤剪力強度增量 ΔS_1 ，可利用根系之楊式模數回歸公式 $E_i = a \times d_i^b$ (a 及 b 為根系拉力常數，依植物種類及拉力試驗而定) 代入(11)式計算求得：

$$\Delta S_1 = \left[\pi(\tau' Z a)^{1/2} \gamma \delta / 2A_s \right] \sum_{i=1}^m n_i d_i^{(b+3)/2} \quad (11a)$$

另外，土~根間發生相對滑移所提供之土壤剪力強度 ΔS_2 ，可由前述之(13)式推得。而(13)式中之根長 L 可採用根系之根長回歸公式進行估算：

$$L = R \times d^g \quad (16)$$

其中，常數 g 與 R 分別為： $0.5 < g < 1$ ； $200 < R < 1000$ 。因此，(14)式可改寫為：

$$\Delta S_2 = \left[\pi\tau' R \delta / 2A_s \right] \sum_{i=1}^j n_i d_i^{g+1} \quad (14a)$$

利用(11a)式和(14a)式計算含根土壤剪力強度總增量 $\Delta S (= \Delta S_1 + \Delta S_2)$ 時，若將根系之剪位移 X 納入公式內，則必須先求得根系受剪後之長度 l 。此時，可將(15)式中之 T_f 以 $T_N (=k\gamma l)$ 取代，並整理得：

$$l = (EZd / \tau')^{1/2} (\sec \beta - 1)^{1/2} \quad (17)$$

其中， $\tan \beta = X/Z$ ， $E = a \times d^b$ ，而 $l (=L)$ 可由(16)式求得。利用(17)式即可推求具有 i 等級根徑 d_i 之根系，其土~根間發生相對滑移之臨界剪位移量 X_{Si} (當 $d = d_i$ ， $l = l_i = L_i = R \times d_i^g$ 時之 X 值)：

$$X_{Si} = Z \tan \left[\sec^{-1} (A d_i^y + 1) \right] \quad (18)$$

其中， $A = \tau' R^2 / Z a$ 而 $y = 2g - b - 1$

為求得具有 i 等級根徑 d_i 之根系，發生斷裂時之臨界位移量 X_{Bi} ，可利用根系極限

破壞拉力強度之回歸公式 $T_f = cxd f$ (c 及 f 為根系拉力常數，依植物種類及拉力試驗而定)，並將(8)式中之 T_N 以 T_f 替代，經過上述之同樣整理後，可推求根系發生斷裂之臨界剪位移量 X_{Bi} (當 $d = d_i$ ， $T_n = T_f = cxd_i f$ 時之 X 值)：

$$X_{Bi} = Z \tan \left[\sec^{-1} \left(B d_i^r + 1 \right) \right] \quad (19)$$

其中， $B = c^2 / 4r'aZ$ 而 $r = 2f - b + 1$

由(18)及(19)式可分別求得 i 等級根徑 d_i 之根系，土~根間發生相對滑移與根系斷裂之臨界剪位移 X_{Si} 及 X_{Bi} 。當根系剪位移 X 在 $X < X_s < X_b$ 時，則此根系在剪位移 $X < X_b$ (根系不會發生斷裂) 且在 $X < X_s$ 之情況下，根系提供之抗剪強度增量 ΔS_1 可依(11a)式來計算。再者，當 $X_b > X > X_s$ 時土~根開始發生滑移 (根系仍未斷裂)，根系提供之抗剪強度增量 ΔS_2 可依(14a)式計算。當根系之 $X_s > X_b$ 時，則土~根間不會發生滑移 (因為滑移發生前根系已斷裂)。因此，在 $0 < X < X_b$ 之情況下，根系提供之抗剪強度增量 ΔS_1 可依(11a)式來計算。最後，當在 $X > X_b$ 時，根系將發生斷裂且 $\Delta S_1 = 0$ 。因此總結上述各情況，根系剪力強度總增量 ΔS 為不發生滑移之增量 ΔS_1 及發生滑移之增量 ΔS_2 之總和，如下式：

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \quad (20)$$

研究方法

本研究採用二維有限元素程式模擬無根及含根土壤之室內與現地直剪試驗。由於程式採用平面應變(plane strain)之變形運算模式，其運算方式乃於計算平面之垂直方向取單位厚度(1m)之幾何模式來進行。一般，此幾何模式之效應可由輸入參數之轉換來加以考量。本研究之主要目的在建立一個根系參數的轉換方法，使數值模擬中之土~根力學行為能充分反映實際根系應有的加勁效果。

藉由比較數值模擬結果與試驗量測值間之符合度，以確認參數轉換之有效性與程式模擬含根土壤之可靠度後，即可進行全尺寸含根坡面之穩定安全檢算及根系各項參數研究。

3.1 土~根剪力試驗有限元素法數值模擬

程式依問題所涉及不同性質之土壤及非土壤(結構)材料，設計不同功能之元素類型(element type)及材料模式(material model)來進行數值模擬。

3.1.1 元素類型

1. 土壤元素

土壤採用 15 結點(nodal points)之三角形土壤元素(soil element)進行模擬，元素中含有 12 個應力點(stress points)或高斯點(Gaussian points)如圖三所示。元素應力點之變位乃利用計算求得之結點變位及四次多項式內插函數內插求得，而元素之勁度矩陣則以應力點之局部座標及權重值進行數值積分後予以決定。

2. 土工格網元素

根系採用 5 結點(配合 15 結點土壤元素)之四邊形土工織物元素(geo-textile element) 或 土工格網元素(geo-grid element)

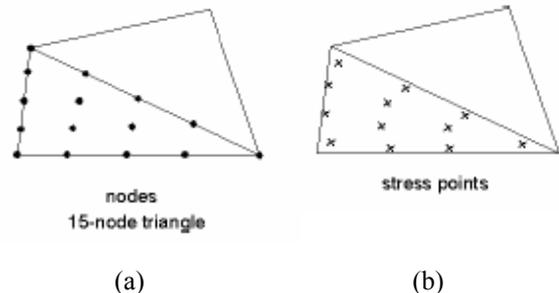


圖 3. 15 結點三角形土壤元素(a)結點及(b)應力點分布

Figure 3. 15-node triangular soil element (a) nodal point (b) stress point distribution.

進行模擬，元素中含有 8 個應力點 (stress points)，如圖四所示。元素只具有軸向勁度，而不具有彎曲勁度，且只承受拉力而不承受壓力。

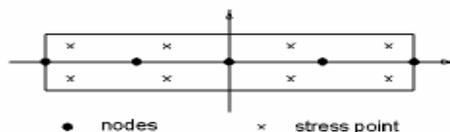


圖 4.5 結點四邊形地工格網元素結點及應力點分布

Figure 4. Distribution of nodal point and stress point for 5-node quadrilateral geo-grid element.

3.1.2 材料模式

1. 摩爾-庫倫(Mohr-Coulomb)完全彈塑性模式(或 MC-模式)

土壤採用 MC-模式進行模擬，其應力~應變關係為完全彈塑性(perfectly elasto-plastic)並採用三組降伏函數(yield function)作為材料降伏破壞之判定準則以及三組塑性潛勢函數(plastic potential function)以便計算材料之塑性應變。降伏函數在主應力空間($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)中為一不規則六角錐(hexagonal cone)降伏面，其大小與形狀不受塑性應變之影響，如圖五所示。其主要輸入材料參數包括：彈性模數 E_s 、柏松比 ν 、凝聚力 C 、摩擦角 ϕ 及膨脹角 Ψ 。

2. 彈性模式

根系採用彈性模式進行模擬，並假設為完全彈性材料，其主要輸入材料參數為軸向勁度 $E_r \times A_r$ 。其中， E_r 與 A_r 分別為根系之彈性模數與截面積。

3.2 實驗室方型剪力盒直剪試驗

本研究採用張俊斌(1995)之試驗成果進行數值模擬。

3.2.1 試驗內容

1. 供試土樣

取自彰化縣田尾鄉田間土壤，風乾後通過 3/8" 篩，將土裝入 30cm×30cm×40cm 之木製盆栽箱內，以密度控制方式壓實土壤試體。選取 20-30cm 高預先培養之台灣赤楊(*Alnus formosana*)小苗，於木製盆栽箱中植入試體 23cm 深度，再將水均勻分布加入試體中，以達預定含水量(15%、20%)。

2. 試驗儀器

- (1)大型直接剪力儀：驅動馬達配合一組可變速齒輪(10 種速度)，垂直荷重槓桿比為 20：1。
- (2)剪力盒試樣容積為 30cm×30cm×20cm，最大剪斷力可達 2000kg，另附有 2000kg 壓力衡圈與垂直載重調節槓桿及砝碼組。
- (3)木製容器：為一 30cm×30cm×40cm 之長方形容器，作為供試植物培育處所。容器內填土後之高為 23cm，此乃配合剪力盒容積高 20cm 所作之調整，高出之 3cm 土樣將作為試驗前修整用。

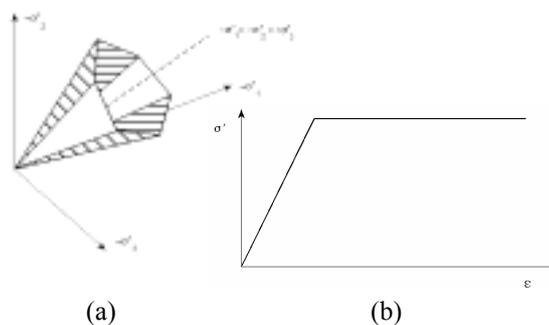


圖 5. 摩爾-庫倫完全彈塑性模式(a)有效主應力空間中之不規則六角錐降伏函數(b)完全彈性應力~應變曲線

Figure 5. Mohr-Coulomb perfectly plastic model (a) yield function with irregular hexagonal cone shape (b) stress~strain curve.

3. 試驗方法

將植入供試植物之木箱置於網室中，經過五個月後，先取無植物組進行不含根試體之直剪試驗。經過一個月，再進行含根試體直剪試驗。於試驗進行前，先將木箱內含根試體之植物上部切除，並將試體周圍及底部之木板拆解後，將試體放入剪力盒內進行剪力試驗。大型直接剪力試驗之操作步驟如下：

- (1)調整齒輪箱齒輪及檔數，本試驗採用定應變率方式加載剪力，加載速率 3.95mm/min。
- (2)拔出固定上下剪力盒之螺絲釘，啟動直剪試驗儀，推進剪力盒使其與壓力衡圈接觸後，暫停儀器。
- (3)將壓力衡圈及應變計歸零，並於剪力盒垂直方向上加載垂直荷重。
- (4)啟動直剪試驗儀，在一定時間間隔內記錄壓力衡圈之讀數，至其讀數不變或倒退時停止試驗。
- (5)準備三至四個試體並分別改變垂直荷重，再重複(2)~(4)試驗步驟。

3.2.2 建立幾何模式

剪力盒上、下盒寬均為 30cm 而高為 10cm，由於進行直剪試驗時，下盒固定位移受拘束（即水平位移 $\Delta x=0$ ，垂直位移 $\Delta y=0$ ），上盒受力驅動且位移不受限制。先於上盒頂部加載均勻正向應力，再於上盒之右側連續累加均勻位移，以模擬直剪試驗儀之定應變率剪力加載，如圖六(a)所示。而試體中根之配置，則假設根徑一致且均勻分布於試體中，並垂直通過受剪面。又考量幾何模式建立的方便性，可將根系之根數定為 30 根並將其配置為 5 排而每排有 6 支根。其幾何模式如圖六(b)所示。圖七(a)及(b)為有限元素網格。

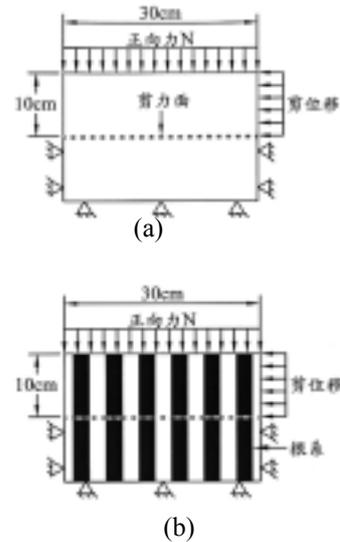


圖 6. 直剪試驗幾何模式(a)無根試體(b)含根試體

Figure 6. Geometry model of direct shear test (a) soil specimen without root (b) soil specimen with root.

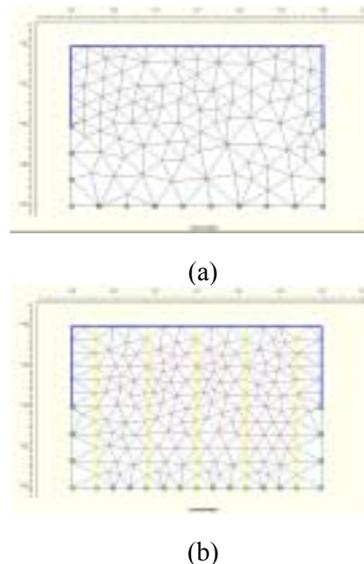


圖 7. 直剪試驗有限元素網格(a)無根試體(b)含根試體

Figure 7. Finite element mesh of direct shear test (a) specimen without root (b) specimen with root.

3.2.3 決定輸入參數

數值模擬所需各項輸入參數如表一所示：

表 1. 實驗室直剪試驗各參數實際值與轉換輸入值

Table 1. Actual values and conversion values of input parameter for laboratory direct shear test.

項目	C kPa	ϕ °	ν	Es kPa	γ_{unsat} KN/m ³	γ_{sat} KN/m ³	Er kPa
實際值	2.25	15	0.35	1120	18	20	476950
輸入值				336			2384.75

註：表中符號 C 為土壤凝聚力、 ϕ 為土壤摩擦角、 ν 為包松比、Es 為土壤彈性模數、 γ_{unsat} 為土壤未飽和單位重、 γ_{sat} 為土壤飽和單位重、Er 為根系楊氏模數。

1. 土壤參數

由於直剪盒上、下盒內之試體容積皆為 30cm×30cm×10cm (如圖八(a))，但二維有限元素法平面應變運算模式，乃是於計算平面之垂直方向取單位厚度(1m)之幾何模式來進行運算(如圖八(b))。因此，模擬受剪面被高估為一面積 $A_{Pl}=30\text{cm}\times 100\text{cm}$ 之長方形平面，其與試驗時之實際受剪面為一面積 $A_{Lab}=30\text{cm}\times 30\text{cm}$ 之正方形平面並不符合。有鑑於此，乃將平面應變之土壤彈性模數 Es 值加以折減，使其與試體實際受剪面具有等當量的勁度。彈性模數 Es 值折減方式為：

$$\tau_{Lab} \times A_{Lab} = \tau_{Pl} \times A_{Pl} \quad (21)$$

其中 τ_{Lab} 與 τ_{Pl} 分別為實際與模擬受剪面之剪應力。因此，可將 (21) 式改寫為：

$$\tau_{Pl} = \frac{A_{Lab}}{A_{Pl}} \tau_{Lab} = 0.3\tau_{Lab} \quad (22)$$

又依剪應力彈性方程式 $\tau = G_s \times \gamma$ ， $G_s = E_s / 2(1 + \nu)$ 。式中，G 為剪力模數， γ 為剪應變， ν 為柏松比。因此可推得：

$$(E_s)_{Pl} = 0.3(E_s)_{Lab} \quad (23)$$

2. 根系參數

依據文獻(張俊斌，1995)可知，受剪面上根系之斷面積比 A_r/A_s 為 5.05×10^{-4} ，而實際受剪面之面積 A_s 為 900cm^2 ，則經換算得知受剪面上根系之配置根數為 30 支根時，其相當之平均根徑約為 1.3mm。另外，根系彈性模數 Er 值，乃採用 Osterstein and Frydman (2000) 所提，迷迭香(Rosemary) 之根徑 d 與 Er 值之回歸公式來決定：

$$E_r = 947 \times e^{-0.49d} \quad (24)$$

其中，Er (MPa) 為根系之彈性模數；d (mm) 為根徑。將 $d=1.3\text{mm}$ 代入公式(24)中，可得 $E_r=476950\text{kPa}$ ($=E_{rLab}$)。

由於二維有限元素法平面應變運算模式之限制，實際根系(如圖九(a))，與模擬根系(如圖九(b))，情況並不符合，因此將平面應變之 Er 值加以折減。再利用(21)式，其中 τ_{rLab} 與 τ_{rPl} 分別為實際與模擬根系之剪應力， A_{rLab} 為實際根系斷面積(每排) $= (1.3\text{mm} \times 1.3\text{mm} \times \pi / 4) \times 5$ ，而 A_{rPl} 為模擬根系斷面積 $= 1.3\text{mm} \times 1000\text{mm}$ ，故得

$$\tau_{rPl} = \frac{A_{rLab}}{A_{rPl}} \tau_{rLab} = 5 \times 10^{-3} \tau_{rLab} \quad (25)$$

$$E_{rPl} = 5 \times 10^{-3} E_{rLab} (=2384.75\text{kPa}) \quad (26)$$

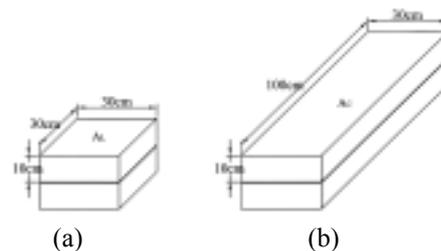


圖 8. 直剪試驗(a)實際受剪面與(b)模擬受剪面示意
Figure 8. Direct shear test (a) actual shearing plane (b) simulated shearing plane.

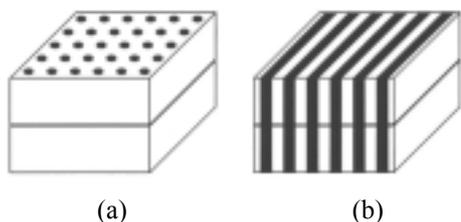


圖 9. 直剪試驗(a)實際根系與(b)模擬根系之幾何分布

Figure 9. Direct shear test (a) actual root system (b) simulated root system.

3. 剪力盒參數

在數值分析中將金屬剪力盒以樑元素模擬，其輸入的主要參數有 EI (彎曲勁度，flexural stiffness) 及 EA (軸向勁度，axial stiffness)，若設定金屬剪力盒之鋼板厚度為 1cm，則其輸入值分別為 $EI=1.6 \times 10^3 \text{ kNm}^2/\text{m}$ 及 $EA=2.0 \times 10^5 \text{ kN/m}$ 。

3.2.4 模擬分析之執行

為配合位移控制型之直剪試驗，因此，整個試驗過程以位移增量方式進行剪力加載以進行模擬，並計算受剪面之抗剪應力。模擬依下列階段 (phase) 進行：

phase 1: 加正向力，模擬剪力盒受到正向力作用後受剪面之正向應力分布。

phase 2~11: 位移量由 1mm 持續加到 10mm，每一階段之位移增量為 1mm。

phase 12~16: 位移量由 12mm 持續加到 20mm，每一階段之位移增量為 2mm。

phase 17~19: 位移量由 25mm 持續加到 35mm，每一階段之位移增量為 5mm。

3.3 實驗室圓管土柱直剪試驗

本研究採用 Operstein and Frydman (2001) 之試驗數據進行數值模擬。

3.3.1 試驗內容

1. 供試樣本

採用直徑 20cm、長 100cm 之塑膠圓管，並事先在其不同高程位置切斷管子形成不連續切口後，同時採用鋼箍將切口兩端之管子暫時予以固定。隨之，在管內進行填土植生。回填土採用白堊土 (chalk)，而植生植物採用紫花苜蓿 (alfalfa)、迷迭香 (rosemary)、黃蓮木 (pistacia) 和桂花 (cistus)。如此，植生在養育時間達 1~2 年時即可在選定之切口位置進行直接剪力試驗。在進行試驗前，為了模擬含根土在浸水飽和的狀態 (最惡劣狀態)，可於含根土試樣中注水使其含水增加，直到試樣頂部淹滿且底部有水流出為止。

2. 試驗儀器

直剪試驗使用大型直剪儀 (有上、中、下三個剪力盒並可進行雙剪試驗)。由於本試驗為單剪試驗，並使用圓管樣本。為配合單剪試驗，可將上盒移除，而祇採用中、下兩個剪力盒 (尺寸為 300mm×300mm)，剪力盒中間則預留直徑 200mm 的圓孔以便安裝圓管樣本。圓管之切口位於離管頂 50mm 到 750mm 處，這些切口的位置 (離管頂 200、400 及 750mm) 即為剪斷面的位置。由水平液壓千斤頂施加推力於剪力盒上部，由測微計量測剪力盒上部的位移。直接剪力試驗之最大剪位移量為 40mm，所有剪力試驗在 0.1mm/min 的定速率下進行。

3.3.2 建立幾何模式

塑膠圓管直徑為 0.2m，長為 1m，剪斷面下部之圓管邊界均設定為無位移固定邊界，而上部則為自由移動邊界。本試驗以剪斷面上方之土壤自重為正向力，因此不另於模式上部施加载重，而位移加載方式與上節直剪試驗模擬方式相同，即於剪斷面右側持續施加向左之位移增量。

由於 Operstein and Frydman (2001) 所提之根系數據僅有圓管不同高程 h ($=0.2$ 、 0.4 及 0.75m) 受剪面上，實際根系之平均拉力強度 T_r 值 ($=T_{\text{Lab}}/A_{\text{Lab}}=90\text{kPa}$)，在

h=0.2m)，如(4)式所示。再者，由於實際試驗與數值模擬應具有相同之 T_r 值，因此數值模擬平面應變之 T_r 值(=TP1/AP1)可依下式推得：

$$T_r = T_{Pl} / A_{Pl} = T_{Lab} / A_{Lab} \quad (27)$$

其中， T_{Lab} 與 T_{Pl} 分別為實際試驗與數值模擬根系纖維由變形至拉斷所發展的總抗拉力。最後，特定深度受剪面之 T_{Pl} 值可計算為 18kN。同時， T_{Pl} 可再表為：

$$T_{Pl} = \sum t_i n_i a_i \text{ 或 } n_i = T_{Pl} / \sum t_i a_i \quad (28)$$

再根據迷迭香(Rosemary)之根徑與根系極限拉力強度之回歸公式：

$$t = 53e^{-0.21d} \quad (29)$$

其中， t 為單根之極限拉力強度(MPa)； d 為根徑(mm)。若假設平均根徑 $d=3\text{mm}$ (截面積 $a=7.07 \times 10^{-6}\text{mm}^2$)，則可求得 $t=28.22\text{MPa}$ 。將 T_{Pl} 、 t 及 a 代入 (28) 式中，可得根數 $n=80$ 根。因此，根系採用 4 排且每排 20 支根之配置方式，均勻分布於土壤中。(幾何模式如圖十(a) (b)、有限元素網格如圖十一(a)(b)所示)

3.3.3 決定輸入參數

數值模擬所需各項輸入參數如表二所示：

項目	參數		C kPa	ϕ °	ν	Es kPa	γ_{unsat} KN/m ³	γ_{sat} KN/m ³	Er kPa
	深度 m	根徑 mm							
實際 值 輸 入 值	0.2	3	3.5	37	0.4	1650	11.6	16.8	217790
	0.4	2							355470
	0.75	1							580200
	0.2	3				259.1			10240
	0.4	2							16710
	0.75	1							27270

表 2. 圓管直剪試驗各參數實際值與轉換輸入值

Table 2. Actual values and conversion values of input parameter for cylindrical direct shear test.

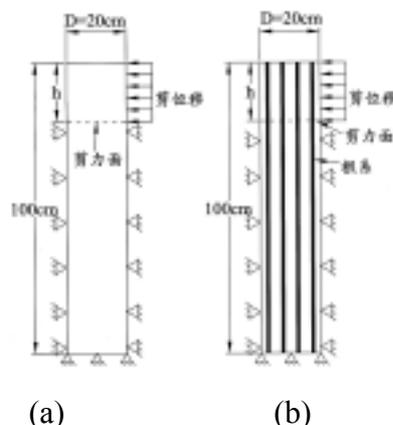


圖 10. 圓管直剪試驗幾何模式(a)無根試體(b)含根試體
Figure 10. Geometry model of cylindrical direct shear test (a) specimen without root (b) specimen with root.

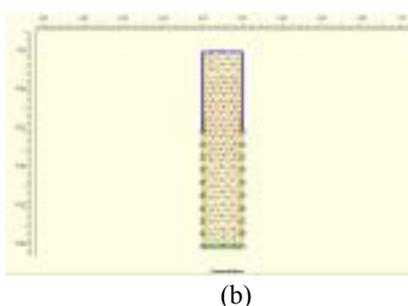
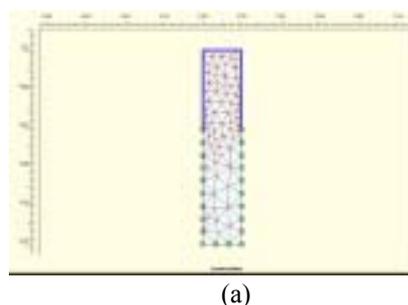


圖 11. 圓管直剪試驗有限元素網格(剪斷面位置 $h=40\text{cm}$)(a)無根試體(b)含根試體
Figure 11. Finite element mesh of cylindrical direct shear test (shearing plane at $h=40\text{cm}$) (a) specimen without root (b) specimen with root.

1. 土壤參數

圓管直剪試驗中實際剪斷面為直徑 $D=20\text{cm}$ 之圓形面積 ($A_{Lab}=\pi D^2/4$)，但數值模擬之剪斷面為平面應變之長方形面積 ($A_{Pl}=20\text{cm}\times 100\text{cm}$)，如圖十二所示。因此，在數值模擬中，土壤之彈性模數 E_s 值必須進行轉換，以便和實際試體之受剪面有相同的勁度。由(22)及(23)式，將各參數代入計算可得：

$$\tau_{Pl} = \frac{A_{Lab}}{A_{Pl}} \tau_{Lab} = 0.157 \tau_{Lab} \quad (30)$$

$$(E_s)_{Pl} = 0.157 (E_s)_{Lab} \quad (31)$$

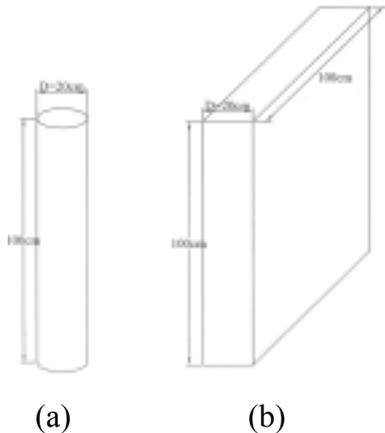


圖 12. 圓管直剪試驗(a)實際受剪面與(b)模擬受剪面

Figure 12. Cylindrical direct shear test (a) actual shearing plane (b) simulated shearing plane.

2. 根系參數

依試驗推估根系每排 20 支根之截面積 $A_{rLab}=(3\text{mm}\times 3\text{mm}\times \pi/4)\times 20$ ，以及數值模擬根系之截面積 $A_{rPl}=3\text{mm}\times 1000\text{mm}$ ，如同前節理由，數值模式中，根系之彈性模數值 E_{rPl} 可經轉換求得如下：

$$\tau_{rPl} = \frac{A_{rLab}}{A_{rPl}} \tau_{rLab} = 0.047 \tau_{rLab} \quad (32)$$

$$E_{rPl} = 0.047 E_{rLab} \quad (33)$$

3. 剪力盒參數

在圓管直剪試驗中使用之 PVC 管，若假設其厚度為 1cm，則其彎曲及軸向勁度分別為 $EI=1.6\text{ kNm}^2/\text{m}$ 、 $EA=2.0\times 10^3\text{ kN/m}$ 。

3.3.4 模擬分析之執行

配合位移控制式圓管直剪試驗，整個剪斷數值模擬以位移增量方式進行剪力加載，並計算受剪面之抗剪應力。模擬階段(phase)如下：

phase 1~10：位移量由 1mm 持續加到 10mm，每一階段之位移增量為 1mm。

phase 11~15：位移量由 12mm 持續加到 20mm，每一階段之位移增量為 2mm。

3.4 現地方形剪力盒直剪試驗

本研究採用阿部和時 (1996)之實驗數據進行數值模擬。

3.4.1 試驗內容

1. 供試樣本

選用森林綜合研究所千代田試驗地實驗林 7-10 年生之柳杉根系，以根系所在位置為中心向外圍劃定 1m^2 之試區。砍除供試林木之地上部，並於試區四周外緣挖掘長與寬皆為 1m、深 50cm 之土溝，以便架設剪力試驗設備，並提供足夠之空間以容納最終剪位移量。

2. 試驗方法

於完成整修之試體上鋪置 $1\text{m}\times 1\text{m}\times 0.5\text{m}$ (長×寬×高)金屬剪力盒，再於一側土溝中配置底座，並將油壓千斤頂固定於底座上。千斤頂前端架設一承壓板後，再將載重加於承壓板上，使力量均勻作用於試體上。於承壓板兩側裝設變位計，以量測剪位移。調整油壓機出油量，使剪位移速率維持 $5\text{mm}/\text{min}$ ，並每隔 30 秒記錄變位計讀數，至剪應變達 10% (剪位移為 100mm) 時結束試驗。試驗完成後清除根株周圍土壤，估算受剪面根系之根數及根截面積以供模擬參考。

3.4.2 建立幾何模式

於上盒頂部施加一均勻向下之正向載

重，另於剪力盒之右側持續施加位移增量，以模擬現場千斤頂推移試體。由試驗結果得之，含根試體受剪面上根系之平均根數為 42 支根而平均根徑為 2.5mm。另外，現地根系之生長貫入土深不超過 60cm，因此可假設根系由地表向下生長並有 10cm 通過受剪面(試體高 50cm)，其幾何模式如圖十三(a)(b)所示，而有限元素網格如圖十四(a)(b)所示。另一種假設為根系由試體中央呈傘狀均勻向四周分布並通過剪斷面，如圖十五所示，根與受剪面之夾角依位置不同而變化，其幾何模式如圖十六所示，有限元素網格如圖十七所示。

3.4.3 決定輸入參數

數值模擬所需各項輸入參數如表三所示：

表 3. 現地直剪試驗各參數實際值與轉換輸入值

Table 3. Actual values and conversion values of input parameter for field direct shear test.

項目	C kPa	ϕ °	ν	E_s kPa	γ_{unsat} KN/m ³	γ_{sat} KN/m ³	E_r kPa
實際值	4	37.3	0.35	12500	18	20	278200
輸入值							420

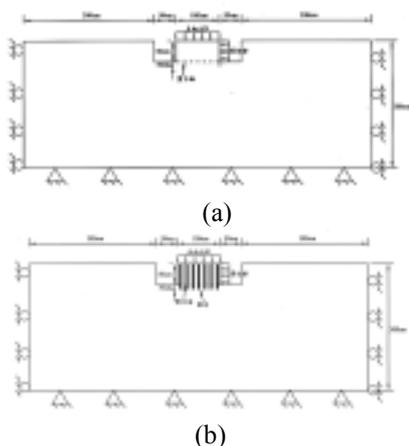


圖 13. 現地直剪試驗幾何模式(a)無根土壤(b)含根土壤

Figure 13. Field direct shear test (a) specimen without root (b) specimen with root.

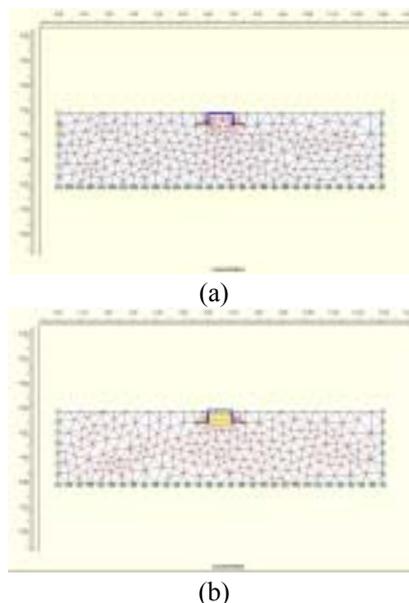


圖 14. 現地直剪試驗有限元素網格(a)無根土壤(b)含根土壤

Figure 14 Finite element mesh of field direct shear test (a) specimen without root (b) specimen with root.

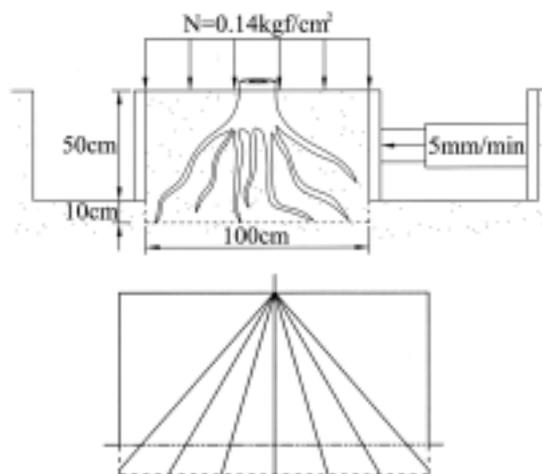


圖 15. 現地直剪試驗根系傘狀分布示意
 Figure 15. Illustration of the distribution of root system with umbrella shape in field direct shear test.

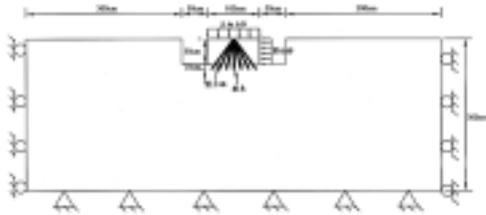


圖 16. 現地直剪試驗根系傘狀分布幾何模式
Figure 16. Geometry model of field direct shear test with root system of umbrella shape distribution.

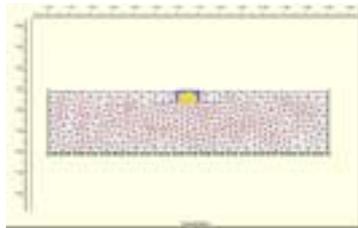


圖 17. 現地直剪試驗根系傘狀分布有限元素網格
Figure 17. Finite element mesh of field direct shear test with root system of umbrella shape distribution.

1. 土壤參數

由於現地試驗之大型金屬剪力盒之長與寬皆為 1m，即試驗受剪面之實際尺寸與數值模擬者相同，因此，土壤之彈性模數 E_s 值不必進行平面應變之轉換。

2. 根系參數

根系平均根徑 $d=2.5\text{mm}$ ，採用(24)式決定根系之 E_r 值為 278.2MPa 。如同前節理由，數值模式中，根系之彈性模數值 E_{rPI} 可經轉換求得。其中， A_{rLab} (每排) $= (2.5\text{mm} \times 2.5\text{mm} \times \pi / 4) \times 7$ (根)，而 $A_{rPI} = 2.3\text{mm} \times 1000\text{mm}$ ，故得：

$$\tau_{rPI} = \frac{A_{rLab}}{A_{rPI}} \tau_{rLab} = 1.5 \times 10^{-3} \tau_{rLab} \quad (34)$$

$$E_{rPI} = 1.5 \times 10^{-3} E_{rLab} \quad (35)$$

3. 剪力盒參數

在程式中將剪力盒以梁元素進行模擬，因此需輸入的主要參數仍為 EI (彎曲勁度)及 EA (軸向勁度)。假設金屬剪力盒之鋼板厚為

1cm，則其彎曲勁度及軸向勁度參數輸入值分別為 $EI=1600\text{kN}\cdot\text{m}^2/\text{m}$ 、 $EA=2.0 \times 10^5\text{kN}/\text{m}$ 。

3.4.4 模擬分析之執行

現地直剪試驗以位移控制進行模擬，並計算抗剪應力。整個剪斷模擬以位移增量方式進行剪力加載，並以下列階段進行：

phase 1：加正向力，模擬剪力盒受到正向力作用後之受剪面正向應力分布。

phase 2-11：位移量由 1mm 持續加到 10mm，每一階段之位移增量為 1mm。

phase 12-16：位移量由 12mm 持續加到 20mm，每一階段之位移增量為 2mm。

phase 17：位移量增為 25mm。

結果與討論

本節將模擬結果與試驗數據進行比較，以便驗證程式的可靠性，並了解剪力試驗各項參數於數值程序中，進行當量轉換後之合理性。

4.1 實驗室方形剪力盒(方盒)直剪試驗

直剪試驗採用 $30\text{cm} \times 30\text{cm}$ 之正方形剪力盒，圖十八顯示含根直剪試驗數值模擬之變形網格。由圖中可知，根系由於受剪而扭曲變形。

圖十九(a)及(b)顯示直剪試驗在不同正向應力 $N (=5.5、11 \text{ 及 } 22 \text{ kPa})$ 作用下之剪應

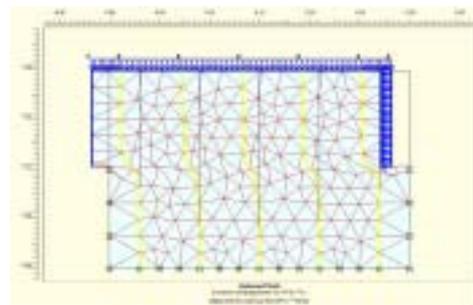


圖 18. 方盒直剪含根試體數值模擬之變形網格
Figure 18 Deformed mesh of specimen with root system in square direct shear test.

變~剪位移關係比較。整體而言，由於土壤材料組合模式先天性的限制，造成初期抗剪應力有驟增的現象外，由於現場剪斷面上根系的分布相當均勻，因此模擬結果與試驗量測會隨位移量之增加而漸趨一致。

4.2 實驗室圓管土柱(圓管)直剪試驗

圖二十顯示圓管直剪試驗含根試體數值模擬之變形網格。圖二十一(a)及(b)顯示圓管直剪試驗在不同高程 h ($=0.2$ 、 0.4 及 0.75m) 之剪應變~剪位移關係比較。

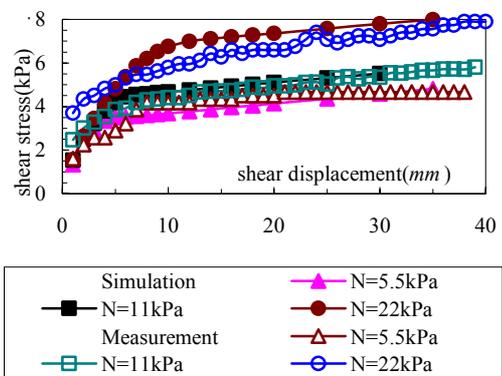
由於實際圓管直剪試驗之受剪面為一圓形截面，而數值分析僅能以矩形受剪面來進行模擬，因此模擬結果與量測值之差異較上述方形剪力盒者為大。其中，含根試體抗剪強度之實際量測值皆高於模擬值。推斷其原因，可能由於實際根系於圓管土柱圓形截面上呈環狀隨機均勻分布，同時外圈根系可對內圈土壤產生環狀的束制作用，使得根系間之土壤在受剪過程中有較高之抗剪強度。反之，在數值分析中根系以規則條狀薄帶(thin stripe)模擬，兩相鄰薄帶間之土壤只受到左右側兩側的束制，其所受之束制及加勁程度較低，因此土壤抗剪強度亦相對較低。

4.3 現地方形剪力盒(現地)直剪試驗

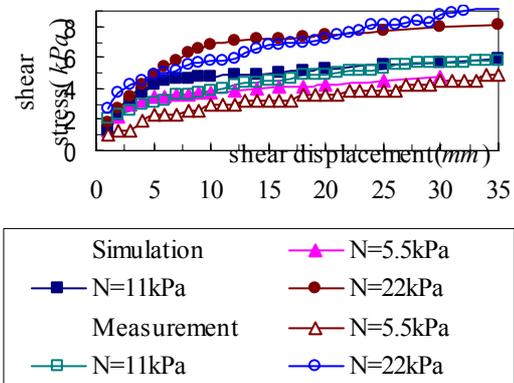
現地直剪試驗之受剪面積為 $1\text{m} \times 1\text{m}$ ，在尺度上最符合實際植生邊坡，因此尺寸效應(size effect)之影響相對較低。圖二十二顯示含根試體數值模擬之變形網格。圖二十三(a)及(b)為現地直剪試驗在不同正向應力 N ($=9$ 、 14 及 19kPa) 作用下，剪應變~剪位移關係之比較。由比較可知，無根試體之模擬值與量測值較為相符，而含根試體則存在較大的差異。由於現地試體內部之植物為野外自然生長，其根系分布較為隨機。反之，在數值模擬中，根系呈規則性的排列，因此模擬與量測間之差異將不可避免。現實上，現地含根試體直剪模擬之正確度受根系實際的生長分布型式影響甚鉅，因為分布型式將主宰根系之現場量測結果。

另外在現地直剪試驗模擬中，可將根系假設為傘狀分布。圖二十四顯示傘狀分布根

系之變形網格。圖二十五顯示，在不同正向應力作用下，模擬結果均大幅度高估受剪面之抗剪應力。高估的原因可能由於在數值模擬中，將根系轉換為條狀薄帶分布所造成。薄帶以傘狀傾斜方式分布於土壤中，位於傘內之土壤，其四周均受到薄帶之圍束，此將使土壤在受剪過程具有更高之勁度，並導致抗剪應力的劇增。另外可預期，呈傘狀分布之根系，在受剪過程中對剪斷面的發展將提供較高的抗力。



(a)



(b)

圖 19. 方盒直剪模擬值與量測值比較(a)無根試體(b)含根試體

Figure 19. Comparison between simulation and measurement of square direct shear test (a) specimen without root system (b) specimen with root system.

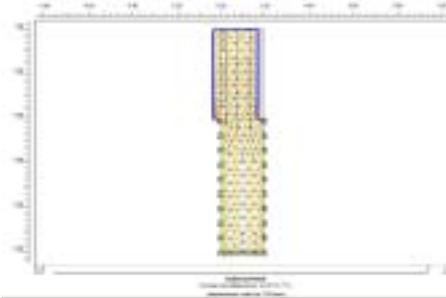


圖 20. 圓管直剪含根試體數值模擬之變形網格

Figure 20. Deformed mesh of specimen with root system in cylindrical direct shear test.

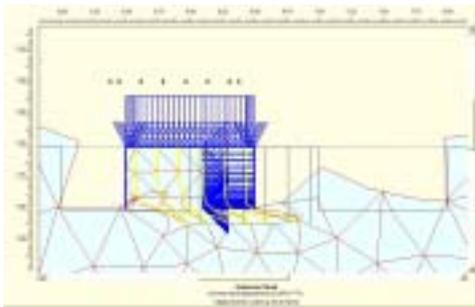


圖 22. 現地直剪含根試體數值模擬之變形網格

Figure 22. Deformed mesh of specimen with root system in field direct shear test.

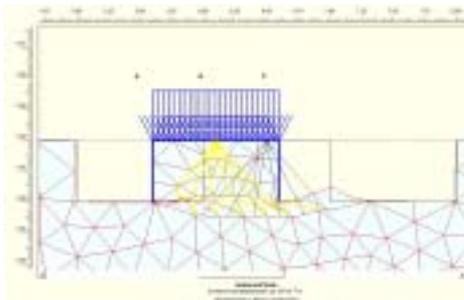
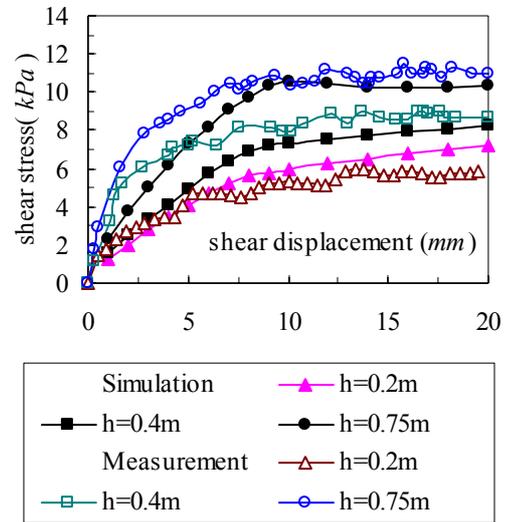
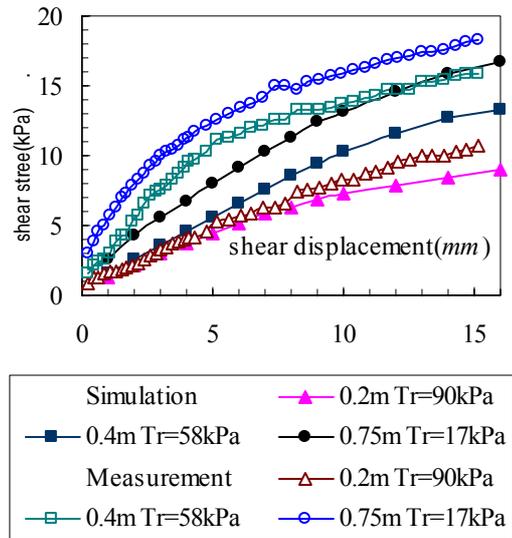


圖 24. 現地直剪傘狀分布根系數值模擬之變形網格

Figure 24. Deformed mesh of specimen with root system of umbrella type of distribution.



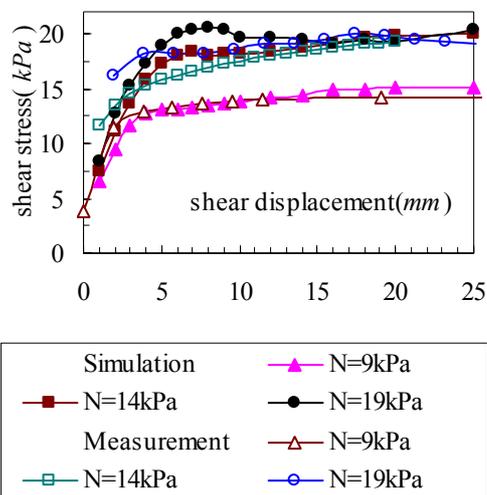
(a)



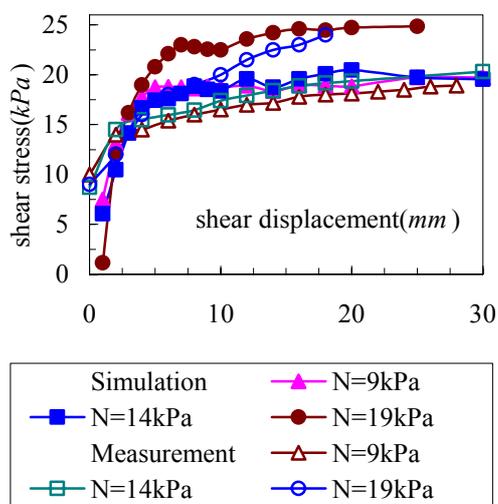
(b)

圖 21 圓管直剪模擬值與量測值比較(a)無根試體(b)含根試體

Figure 21. Comparison between simulation and measurement of cylindrical direct shear test (a) specimen without root system (b) specimen with root system.



(a)



(b)

圖 23. 現地直剪模擬值與量測值比較(a)無根試體(b)含根試體

Figure 23. Comparison between simulation and measurement of field direct shear test (a) specimen without root system (b) specimen with root system.

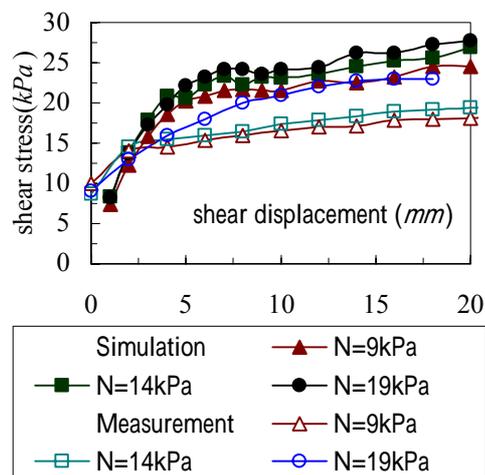


圖 25. 現地直剪傘狀分布根系之模擬值與量測值比較

Figure 25. Comparison between simulation and measurement of field direct shear test with root system of umbrella type distribution.

結論與建議

5.1 結論

一般方形剪力盒直剪試驗之受剪面為正方形，其根系分布型式與平面應變之數值模擬最為近似。再者，圓管直剪試驗之受剪面為圓形，進行平面應變數值模擬時必須將其轉換為矩形受剪面，因此模擬結果與試驗量測值之差異亦較大。另外，現地直剪試驗剪斷面積為 $1\text{m} \times 1\text{m}$ ，雖然在尺度上最為符合平面應變數值模擬之設定，但由於根系植物為現地自然生長，其根系之分布屬於隨機變異，此為造成模擬結果與試驗量測值間產生差異之主因。

5.2 建議

本研究採用之二維有限元素法，平面應變數值模擬分析，在幾何模式之建構上即受

到先天性之限制。同時，輸入材料參數時又必須加以轉換，而每經過一次的轉換即可能造成模擬上之誤差。儘管如此，本研究對各類型直剪試驗之模擬趨勢，大致上仍與實際量測值相吻合。然而在幾何模式較複雜且平面應變模擬無法滿足實際條件之情況，爲了進一步提高模擬之真實度，採用三維模擬是有其必要性。

參考文獻

1. 何昱昀(2004), 根系對土壤加勁效果之數值模擬，國立中興大學水土保持學研究所碩士論文
2. 張俊斌(1995)，中橫崩場地優勢植物植生特性與其根力之研究，國立中興大學水土保持學研究所碩士論文
3. 阿部和時，(1996)，"由現地直接剪力試驗探討根系抑制坡面崩壞效果之研究" (日文)，日本綠化工學會誌 22(2)，P95-108
4. L.J.Waldron (1977), The shear resistance of root-permeated homogeneous and stratified soil, Soil Science Society American Journal, p843~849
5. L.J.Waldron & Suren Dakessian(1981), Soil reinforcement by roots: calculation of increased soil shear resistance from root properties, Soil Science, Vol. 132, No. 6, p427~435
6. Gray, D.H. and W.F. Megaham, (1981), Forest vegetation removal and slope stability in the Idaho batholith, Intermountain forest and range experiment station research paper int-271, Forest service U.S.
7. Tien H. Wu., (1976), Investigation of landslides on prince of wales island Alaska, Geotechnical engineering report No.5, Department civil engineering ohio state university, Columbus, p94
8. Tien H. Wu., William P. McKinnell III and Douglas N. Swanston, (1979), Strength of tree roots and landslides on Prince of Wales Island, Alaska. Can. Geotech. J.16, p19-33
9. Tien H. Wu. and Chinchun Lan, (1988), In situ shear test of soil-root systems, Journal of Geotechnical Engineering, Vol. *114, No.12, p1351-1375
10. V.Operstein and S. Frydman (2000), The influence of vegetation on soil strength, Ground Improvement (2000) 4, p81~89
11. V.Operstein & S. Frydman(2001), Numerical simulation of direct shear of root-reinforces soil, Ground improvement(2001) 5,41-48

95年10月22日 收稿

95年11月28日 修改

95年12月20日 接受

水土保持學報 38(3) : 355-372 (2006)
Journal of Soil and Water Conservation, 38(3) : 355-372 (2006)