

## 應用時間序列方法分析降雨及地下水位之關係

鄭皆達<sup>(1)</sup> 洪豪男<sup>(2)</sup> 周良勳<sup>(3)</sup>

### 摘要

本研究旨在應用統計上之時間序列方法分析知本站之降雨量與地下水位之關係。首先建立降雨量及地下水位之水文資料檔，再就此等資料檔進行波譜密度分析、線性迴歸分析、ARIMA(p,d,q)模式之時間序列方法分析及二元交叉相關函數分析，探討地下水位之週期性、長期趨勢及建立地下水位自迴歸整合移動平均模式(ARIMA)，最後分析降雨量與地下水位之相關性。研究結果顯示降雨量與地下水位之週期均為 12 個月。而降雨量與月平均地下水位長期趨勢皆無明顯變動，知本站地下水位之模式應為 ARIMA(0,1,1)。經二元交叉相關函數分析降雨量與地下水位之關係，大致可判定降雨量為地下水位之前置指標。

(關鍵詞：時間序列分析、ARIMA 模式、二元交叉相關函數分析)

## Application of Time Series Analysis to Relationship of Rainfall and Groundwater Levels

*J. D. Cheng, H. N. Hong*

Professor and Graduate Students respectively, National Chung Hsing University, Taichung, Taiwan  
402, R.O.C

*L. S. chou*

Associate Professor, National Chiayi University, Chiayi, Taiwan

### ABSTRACT

This study investigates rainfall and groundwater levels at Chihpen station with time series analysis. Hydrologic data of rainfall and groundwater levels were first filed. The data files were then used in spectra analysis, linear regression analysis, Autoregressive Integrated Moving Average Models (ARIMA) and cross correlation function analysis. The results show that both secular trend of rainfall and groundwater levels have no significant changes in long term trend. Chihpen station is ARIMA(0,1,1). By way of cross correlation function analysis to concern rainfall and groundwater level, it is obvious that rainfall is the leading factor that affects groundwater levels.

---

(1)國立中興大學水土保持學系教授

(2)國立中興大學水土保持學系碩士班研究生

(3)國立嘉義大學土木與水資源工程學系副教授

## 前言

## 研究方法

在全球總水量中，鹹水的海洋就佔了 97% 以上，偏遠而難以利用的兩極冰帽及冰川約佔 2%，其餘不到 1% 才是人類可取用的水資源，而其中地下水的貯存總量居冠（如表一）。由於地面可用的水源有限，分布又不均，有的地區水資源豐富，有的地區貧乏，爲了滿足日益增加的農業、工業用水及自來水的需求量，除了利用水庫調節之外，地下水就成爲人類日常用水的重要來源之一。

表 1. 地球上水資源的儲量與分配

Table 1. The reservation and distribution of water in earth

分布	儲存量(萬億噸)	分配比率 (%)	
大氣	13	0.001	
地面水	海洋	1320000	97.2
	內陸鹽湖	104	0.008
	淡水湖	125	0.01
	淡水河川	1.25	0.0001
	冰川及兩極冰冠	29000	2.15
生物體內的水	50	0.004	
地下水	8400	0.62	
土壤中的水分	67	0.005	

本文選定紀錄完整且有鄰近雨量站(知本雨量站)之知本地下水位站作爲研究對象。首先建立降雨量及地下水位之水文資料檔，再就此等資料檔進行波譜密度分析、線性迴歸分析、ARIMA(p,d,q)模式之時間序列方法分析及二元交叉相關函數分析，探討地下水位之週期性、長期趨勢及建立地下水位 ARIMA 模式，最後分析降雨量與地下水位之相關性。本研究各項統計分析是使用 SPSS 套裝軟體 8.0.1 中文視窗版進行。

## 一、時間數列之性質

時間數列是一組統計資料，依其發生時間的先後順序排成的序列。依此定義，時間數列具有二個變數，即自變數爲時間，而因變數爲各時間所發生現象的數值或數量。通常我們可將時間數列寫成 $\{Y_t\}$ 的形式，其中 $t=0, 1, 2, \dots$ ，爲下標，並以時間爲橫軸，將各時點的觀測值 $Y_t$ 描繪於圖上，然後連結各點即可構成一曲線，稱爲時間數列曲線圖。由圖可大略了解該觀測值隨著時間變動的趨勢。

## (一) 時間數列的特性

再分析時間數列之前，應先對時間數列所具有的特性有所了解。以下我們列出時間數列之一些重要特性。

1. 時間數列的時間單位可以是年、季、月、周、日等。
2. 時間數列中的時間爲自變數，而因變數則爲其他之變數，可爲總數、平均數、比例、指數等等。
3. 時間數列中的各觀測值通常存有相關性，時間相隔越短的兩觀測值，其相關性越大。因此，基本上時間數列並不滿足所謂「各觀測值爲獨立」的假設。
4. 時間數列中的各觀測值乃按時間先後順序排列，不可任意變更。
5. 不同時間單位的時間數列，爲分析上的需要可加以轉換爲相同時間單位的資料。
6. 分析一些社會現象或經濟現象的時間數列，常須對人口變動與價格變動等因素加以調整或轉換。
7. 時間數列的各觀測值，是該時期中許多影響因素的組合。因此，在做時間數列分析時，須先將時間數列依其組成分加以分解，俾有助於了解過去的狀況與預測未來的情形。

## (二) 時間數列的成分

時間數列之變動的影響因素很多，在做分析之前通常須先了解這些因素。影響時間數列變動的因素，一般稱為時間數列的組成成分。一般皆將時間數列的成分歸納為下列四個：

1. 長期趨勢：時間數列依時間進行而逐漸增加或減少的長期性變化之趨勢，一般皆以 T 表示。
2. 季節變動：時間數列之季節變動係指一年中，呈現固定週期的規則變動。季節變動發生的原因，主要由於受到季節的影響與風俗習慣的形成。一般皆以 S 表示。
3. 循環變動：係沿著長期趨勢或作週而復始的上下變動。循環變動亦為一週期性變動，其週期大約在二至二十年，而每次循環所歷經的週期長短並不相等，且波動幅度亦不一致。一般皆以 C 表示。
4. 不規則變動：係沿著長期趨勢或作不規則的變動或偶然的波動。不規則變動係時間數列中，將長期趨勢、季節變動即循環變動等成分隔離後，所剩下的部分。因此，一般皆將不規則變動視為一種殘差項來處理。一般而言，長期趨勢、季節變動即循環變動接受到規則性因素的影響，只有不規則變動是屬於隨機的性的，也由於他的隨機性，致使其難以衡量及預測。不規則變動一般皆以 I 表示。

(三) 時間數列成分結合的模型

1. 相加模型：假定時間數列係基於四種成分相加之結果。

相加模型中，假定各成份彼此相互獨立，無交互影響；若以 Y 表示時間數列，則其數學方程式為：

$$Y = T + S + C + I$$

2. 相乘模型：假定時間數列係基於四種成分相乘之結果。

相乘模型乃假定各成分之間明顯地存在相互依存的關係，及假定季節變動與循環變動均為長期趨勢的函數。若以數學方程式表示，

則可表為：

$$Y = T * S * C * I$$

基本上，在時間數列分析中，由於乘法模型的假設較切合實際，及各種成分之間存在相互依存的關係，故大都採用乘法模型。

二、移動平均法

移動平均法乃選擇最近 K 期距的資料加以平均，求得目前時間序列資料 K 期距的移動平均數，再依據所得的移動平均數來預測下一期距所發生事件的大小，此種時間序列分析稱為移動平均法。令  $Q_t$  為實際觀測值，對於 K 期距的移動平均  $Q_{K+1}$  與次個 K 期距的移動平均  $Q_{K+2}$  表示如下式：

$$Q_{K+1} = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K Q_t$$

$$Q_{K+2} = \frac{1}{K} \sum_{t=2}^{K+1} Q_t$$

三、ARIMA 模式

一時間數列  $\{X_t\}$ ，若對任意 t 可寫成

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B)\epsilon_t$$

其中  $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ；d 表示差分的階次； $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$  且  $\phi_p(B) = 0$  之根必須落在單位圓之外； $\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$  且  $\theta_q(B) = 0$  之根必須落在單位圓之外。

我們稱此時間數列  $\{X_t\}$  為一個自迴歸整合移動平均模式，記作 ARIMA(p,d,q)。

利用 ARIMA(p,d,q) 的模式分析地下水序列，決定 p,d,q 的階數與決定參數的估計值乃重要的關鍵，模式決定的過程必須遵循兩種基本原則，其一為參數精簡原則，其二為最小誤差原則。以參數的精簡而論，一般對於單獨 AR 或 MA 模式的過程，通常呈現比較高的階數，對於參數的認定很容易就會有過度配適的情況發生，因此，模式的複雜度增加且所需決定的參數亦跟著增加，此分析結果所獲得的模式對於現況的解釋並無太大的幫助；而利用 ARIMA 模式的過程，可以降低階數，

減少必需預測的參數，進而達到模式精簡化的效果。

對於模式的選擇，誤差項表現了預測值與實際值的差異程度，具備最小誤差平方的模式則存在比較精確的結果。Box-Jenkins 對於 ARMA 的階次認定提供了良好的辨認策略，主要是依據自相關函數(ACF)與偏自相關函數(PACF)所表現的收斂的型態來進行階次判定，之後再估計此模式的參數，並檢定預測殘差值，以判定模式是否正確或者需要重新修正，其判斷流程如下圖所示。

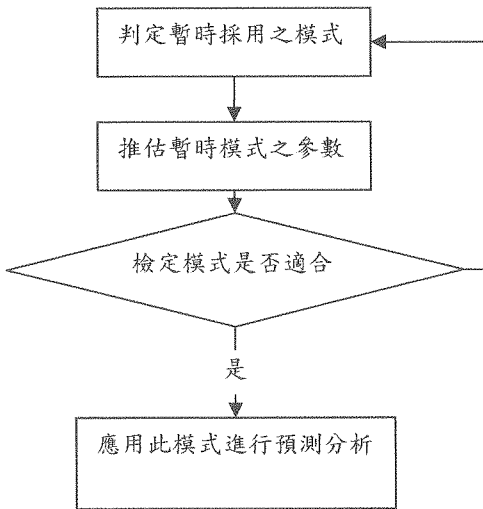


圖 1. 分析流程圖

Figure 1. Flow Chart for Analysis

對於具備無定向型的地下水序列必須透過差分轉置使其呈現平穩型的流量序列，而達到平穩型時之差分階次即可決定 ARIMA(p,d,q) 之 d，而以獨立穩定模式理論，對 ACF 與 PACF 是否收斂之鑑定乃設定估計值小於獨立模式標準誤差值時，則可以認定的函數值為零，利用標準誤差值直接於相關函數的圖形上界定，即可判定收斂點；若相關函數於

第 k 期收斂，則可判定 ARMA(p,q)的階數為 k。時間序列的相關分析中，對於 AR(p), MA(q) 以及 ARMA(p,q)的特徵有綜合的分析探討，可作為模式鑑定之參考，整理如表二。該表的描述，ACF 與 PACF 圖形繪製後可以依據走勢鑑定，決定模式當屬於 AR(p), MA(q) 或 ARMA(p,q)之型態。

表 2. AR(p), MA(q)以及 ARMA(p,q)的特徵說明

Table 2. The characteristics of AR(p),MA(q) and ARMA(p,q)

模式	特徵
白干擾	ACF=0, PACF=0
AR(P)	ACF 逐漸消失, PACF 落差 p 期後消失。
MA(q)	ACF 落差 q 期後消失, PACF 逐漸消失。
ARMA(p,q)	ACF 於 q-p 期後逐漸消失, PACF 於 p-q 逐漸消失。

ARIMA 模式之選取準則

若一組時間數列可以一含有 M 個參數之統計模式擬合之品質可以下列兩判定準則為之：

1. AIC 準則(Akaike's information criterion)

$$AIC(M) = n \ln \sigma_a^2 + 2M$$

2. SBC 準則(Schwartz's Bayesian criterion)

$$SBC(M) = n \ln \sigma_a^2 + M \ln n$$

式中

n: 有效之觀測值個數

M: 參數之個數

$\sigma_a^2$ : 殘差數列之變異數

一般而言 AIC 較適合評估自我迴歸模式，而 SBC 則屬較通用之評估準則，且模式之 AIC 及 SBC 值愈低表示其擬合品質愈佳。

四、二元交叉相關函數分析

二時間序列間之關係可以二元交叉相關函數 (Cross correlation function, CCF) 判定之。若  $\{X_t\}$  與  $\{Y_t\}$  為兩組時間序列，其平均值為  $\mu_x$ 、 $\mu_y$ ，變異數為  $\sigma_x^2$ 、 $\sigma_y^2$ ，則：

1.  $\{X_t\}$  與  $\{Y_t\}$  數列相隔  $k$  個時差之自我變異數：

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(k) &= E[(X_t - \mu_x)(X_{t+k} - \mu_x)] \\ &= E[(X_t - \mu_x)(X_{t-k} - \mu_x)] \\ \gamma_{yy}(k) &= E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t+k} - \mu_y)] \\ &= E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t-k} - \mu_y)]\end{aligned}$$

2.  $\{X_t\}$  與  $\{Y_t\}$  數列相隔  $k$  個時差之交叉變異數：

$$\gamma_{xy}(k) = E[(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y)]$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.  $\{X_t\}$  與  $\{Y_t\}$  數列相隔  $k$  個時差之交叉相關係數定義為：

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

若  $\{X_t\}$  與  $\{Y_t\}$ ， $t=1, 2, \dots, n$  兩組時間數列，其相隔時差為  $k$ ，則其樣本之交叉相關係數為：

$$S_{\gamma_{xy}}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{S_x S_y} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

若兩組時間數列互相獨立，則其交叉相關係數  $\{S_{\gamma_{xy}}(k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  之期望值為零，

標準誤差為  $1/\sqrt{n}$ 。若  $|S_{\gamma_{xy}}(k)| > 2/\sqrt{n}$  (兩倍之標準誤差)，則  $\{X_t\}$  影響  $\{Y_t\}$  之相隔時差為  $k$ ，即  $\{X_t\}$  影響  $\{Y_t\}$  之稽延時差為  $k$ 。 $\{X_t\}$  是  $\{Y_t\}$  的前置指標。

## 結果與討論

### 一、降雨量與地下水位之週期性

週期性探討以頻譜分析方法進行，圖二及圖三分別為降雨量與地下水位進行頻譜分析後之週期圖。由圖可看出降雨量與地下水位頻率在 0.083 時具有最大的能量和變動。故

可能之週期為  $1/0.083=12$  個月。

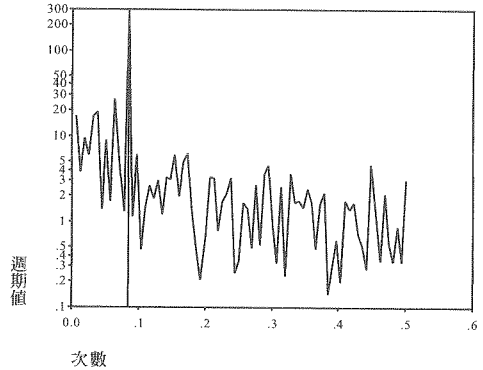


圖 2. 知本站月平均降雨量週期圖  
Figure 2. Periodogram of mean monthly rainfalls

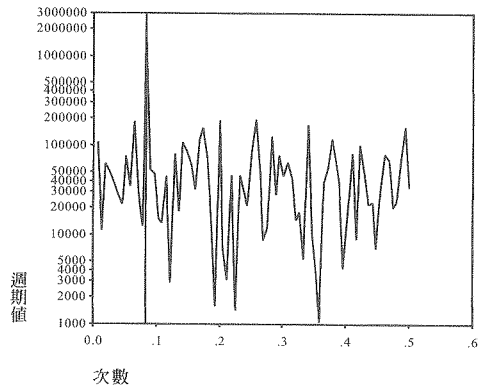


圖 3. 知本站月平均地下水位週期圖  
Figure 3. Periodogram of mean monthly groundwater levels

### 二、降雨量與地下水位之長期趨勢

將降雨量與地下水位求取 12 個月之移動平均值，在進行線性迴歸求取長期趨勢。線性迴歸式以  $Y=a+bt$  表示，若  $b=0$  表示無長期趨勢， $b<0$  表示有遞減之長期趨勢， $b>0$  則表示有增加之長期趨勢。圖四與圖五分別為降雨量與地下水位之移動平均線和線性迴歸趨勢圖。由圖四及圖五可知，知本地區降雨量與地下水位並無明顯變動的趨勢。

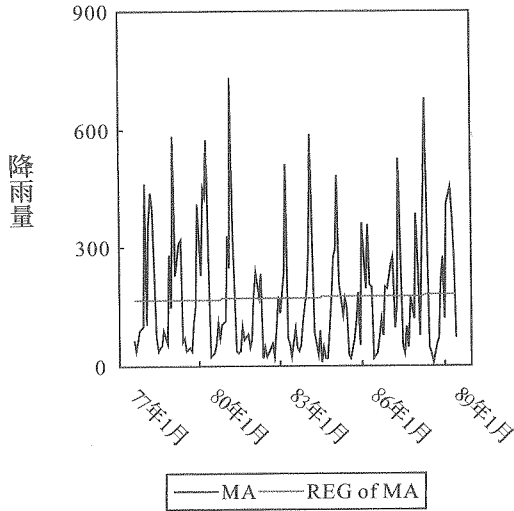


圖 4. 知本站月降雨量移動平均線與線性迴歸趨勢線

Figure 4. Moving average and linear regression of monthly mean rainfall

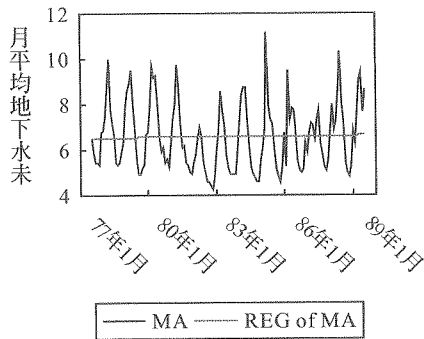


圖 5. 知本站月平均地下水位移動平均線與迴歸線

Figure 5. Moving average and linear regression of monthly mean groundwater levels

### 三、地下水位 ARIMA(p,d,q)模式之建立

利用 SPSS 軟體計算月平均地下水位之自相關(ACF)與偏自相關函數(PACF)並繪製如圖六及圖七;由圖六可看出 ACF 圖形不消失,故知數列為無定向形,因此須對數列取一次差分。而經一次差分之 ACF 及 PACF 圖為圖八及圖九

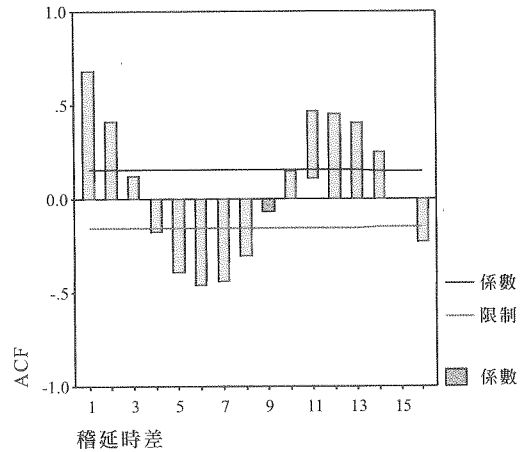


圖 6. 知本月平均地下水位之 ACF 圖

Figure 6. The ACF of monthly mean groundwater levels

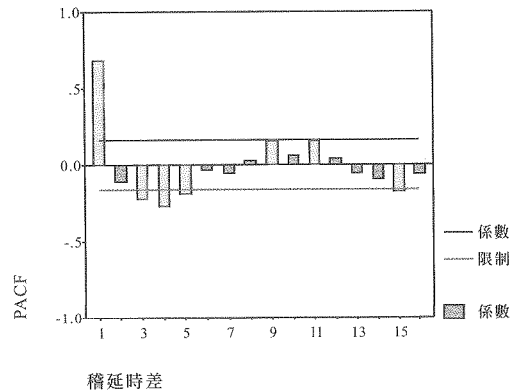


圖 7. 知本月平均地下水位之 PACF 圖

Figure 7. The PACF of monthly mean groundwater levels

由圖八可看出圖形呈正弦函數型態故可暫定模式為 ARIMA(2,1,0)再由圖九得知圖形呈漸漸消失型態則又可判斷模式為 ARIMA(0,1,1)。

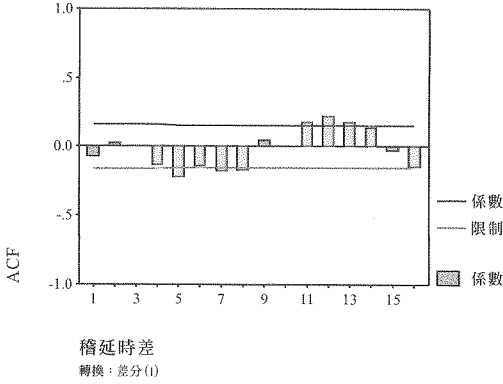


圖 8. 知本月平均地下水水位一次差分 ACF 圖  
 Figure 8. The ACF with once differential of monthly mean groundwater level

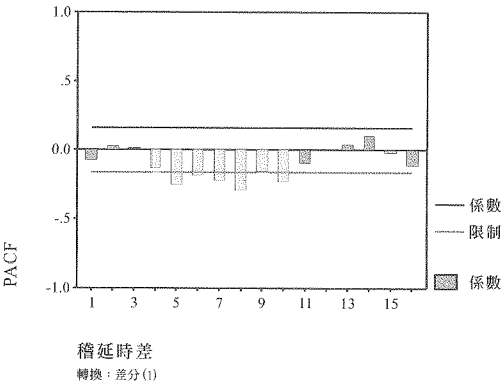


圖 9. 知本月平均地下水水位一次差分 PACF 圖  
 Figure 9. The PACF with once differential of monthly mean groundwater level

在模式精簡的原則下，使用 AIC 準則與 SBC 準則判定，利用 SPSS 軟體分析 ARIMA(2,1,0) 與 ARIMA(0,1,1)之 AIC 與 SBC 值，如表三。

表 3. ARIMA(1,0,0)與 ARIMA(1,1,1)之 AIC  
 Table 3. AIC and SBC of ARIMA(1,0,0)and ARIMA(1,1,1)

	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(0,1,1)
AIC	554.62	552.75
SBC	563.75	558.84

值與 BIC 值結果得知，ARIMA(0,1,1)的模式具備較小的 AIC 值與 SBC 值，顯示該模式較符合精簡的原則。故本地下水水位站之模式應為 ARIMA(0,1,1)其方程式為：

$$Z_t - Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}, |\theta_1| < 1$$

利用 SPSS 軟體，以 ARIMA(0,1,1)模式計算並繪製月平均地下水水位圖，如圖十；以此模式預測未來之地下水水位之結果如圖十一所示。

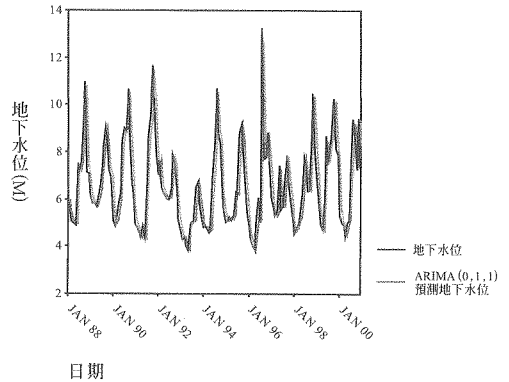


圖 10. ARIMA(0,1,1)鑑定月平均地下水水位圖  
 Figure 10. The chart of monthly mean groundwater with ARIMA(0,1,1)

#### 四、降雨量與地下水水位之關係

就水文觀測站之月平均降雨量及月平均地下水水位分別進行二元交叉相關函數分析，以探討降雨量與地下水水位的關係。圖十二為降雨量與地下水水位經二元交叉相關分析之結果，降雨量為第一數列 $\{X_t\}$ ，地下水水位為第二數列 $\{Y_t\}$ 。

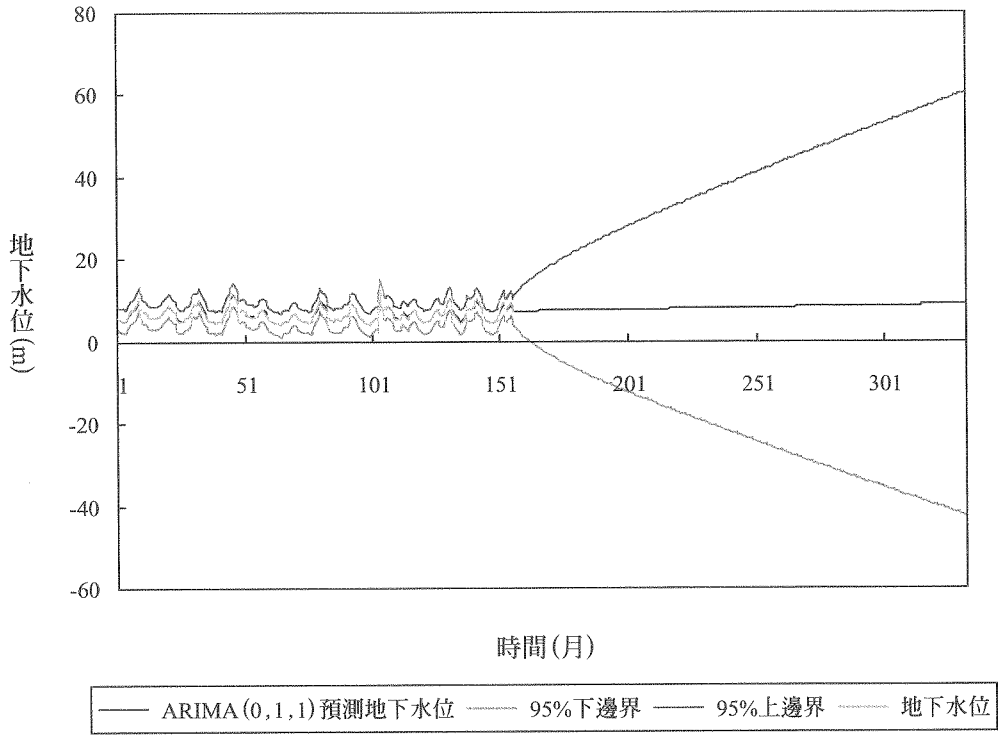


圖 11. ARIMA(0,0,1)模式預測地下水位圖

Figure 11. ARIMA(0,1,1) to project monthly mean groundwater level



由圖可知兩數列在時間上的正相關性。分別在落差 0, 1, 2, 3, 4 期超過信賴區間(大於兩倍標準誤差)。在落差 0 期時有明顯的 CCF 值, 在 1 期落差時為最大。表示降雨一開始就會影響地下水位, 而在稽延一個月後影響為最大。

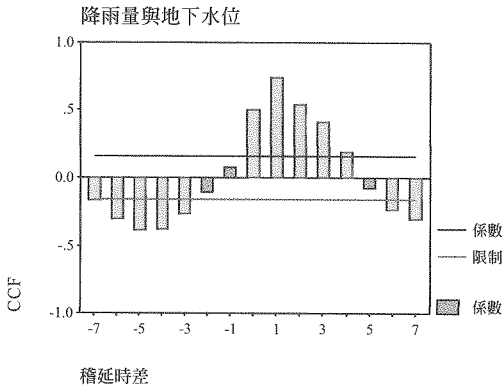


圖 12. 降雨量與地下水位交叉相關函數圖  
Figure 12. Cross correlation function of rainfall and groundwater level

### 結論

- 一、知本水文觀測站月降雨量與月平均地下水位之週期經頻譜分析顯示, 可能週期為 12 個月。然由於資料數仍嫌太少, 故應持續補充降雨量與地下水位資料, 進而增加週期研判之正確性。
- 二、月降雨量與月平均地下水位之長期趨勢經移動平均與線性迴歸分析顯示, 皆呈現沒有變化之長期趨勢。
- 三、知本水文觀測站 ARIMA(p,d,q)模式之建立, 經分析研判為 ARIMA(0,1,1)較為適當。
- 四、本研究使用之 ARIMA 模式僅以時間為單一的變數進行地下水位之分析, 後續之工作宜加入其他影響因子, 如雨量、土層入滲能力等, 進行多變量之時間序

列分析, 以提高模式之預測準確性。

- 五、降雨量與地下水位之相關性經二元交叉相關函數分析, 大致可判定雨量為影響地下水位之前置指標; 降雨在稽延一個月時影響地下水位最大。故在評估地下水位升降時應考慮降雨量的影響性。

### 參考文獻

1. 林茂文(1992), 時間數列分析與預測, 華泰書局。
2. 吳柏林(1995), 時間數列分析導讀, 華泰書局。
3. 吳明隆(2000), SPSS8.0 統計應用實務, 松崗書局。
4. 蘇苗彬, 陳旺志(1996), 台北市山坡地降雨量及地下水位之時間序列分析, 中華水土保持學報第二十七卷第二期, pp.29~54
5. 鄭皆達, 楊文川(2001), 降雨量及地下水位之趨勢與變動分析, 水土保持學報第三十三卷第四期, pp.255~270。
6. 楊文川(2002), 應用時間序列分析探討濁水溪沖積扇扇頂區降雨量及地下水位之趨勢與變動。
7. 許峪萇(2002), 台灣中部七家灣溪集水區流量序列特性之研究。

92 年 1 月 30 日收稿

92 年 2 月 26 日修改

92 年 3 月 03 日接受