

潰壩瞬間急變流之數值演算

陳樹群⁽¹⁾ 彭思顯⁽²⁾

摘 要

本文針對潰壩後所造成之非恆定水流進行數值模擬，採用有限體積法，分別使用 PAVIA 及 Roe 之數值方法建立顯性數值模式。考慮水平光滑渠底，與 Stoker 之潰壩解析解比較十分吻合。並透過本研究之小型水槽試驗結果驗證，亦可獲致不錯之效果，顯示本模式在某些情況下仍有其應用性。

(關鍵詞：潰壩問題、數值模擬、有限體積法。)

Numerical Modeling of Dam-Break Rapidly Varied Flow

Su-Chin Chen Szu-Hsien Peng

Department of Soil and Water Conservation

National Chung-Hsing University, Taichung, 402 Taiwan, R.O.C.

Abstract

This study seeks to model unsteady flow movement in an idealised dam-break configuration. The shallow water equations are solved by using the finite volume method including of the PAVIA and Roe schemes. The simulations are validated by comparison with Stoker's analytic solution and our experiment which was made on the horizontal bed neglected friction. Unsteady flow movement is found to be reasonably well captured by the model.

(Keywords: dam-break problem, numerical modeling, finite volume method.)

(1) 國立中興大學水土保持學系教授

(2) 國立中興大學水土保持學系研究生

前言

Stoker 潰壩問題

由洪水或地震等因素造成壩堤的潰決，或是閘門突然地開啟，都會造成河川水流產生湧浪，並向上下游方向傳遞的現象。一般作非恆定水流之數值模擬使用之方法有特性法(MOC)、有限差分法(FDM)及有限元素法(FEM)，近年來從空氣動力學發展出之有限體積法(FVM)亦被應用至水利工程來分析潰壩水流。有限體積法與其他數值方法比較具有以下之優點，有限體積法將具有守恆型態之微分方程組予以離散化，其計算速度與有限差分法相當，但較有限元素法為快，可節省大量電腦演算時間，且將具有守恆型態之水流連續及動量方程組以積分離散化，此時仍保有守恆的特性，亦即仍保持某些物理量的守恆性質，因此較容易分析湧浪等不連續水流。本文擬使用有限體積法(FVM)作潰壩後非恆定水流之模擬研究，分別以 PAVIA 及 Roe 之數值方法建立數值模式，並與 Stoker (1957)之解析解及本研究之實驗結果比較，驗證模式之正確性。

在平底光滑明渠水流中，當上游或下游端流量突然改變時會形成湧浪(surge)，以速度 V_w 向上游或下游傳播，共有 4 種情況如圖 1 所示 (Subramanya, 1985)。當湧浪產生造成水深增加者為“正湧浪”(positive surge)；反之若因湧浪而造成水深減少者則為“負湧浪”(negative surge)。圖 1 之(a)及(d)可視為閘門突然開啟之情況，原來之流況為 V_1 、 y_1 ，閘門開啟後造成上游入流突增[如圖 1(a)，閘門在上游]或是下游出流突增[如圖 1(d)，閘門在下游]；同理，圖 1 之(b)及(c)則可視為閘門突然關閉之情況，閘門關閉後造成下游出流突減[如圖 1(b)，閘門在下游]或是上游入流突減[如圖 1(c)，閘門在上游]。在圖 1(a)、(b)之情況上下游形成明顯的間斷有如震波(shock)且坡前陡峭，而圖 1(c)、(d)之情況上下游之間斷不那麼明顯有如稀疏波，形成一連續水面逐漸展平(譚維炎，1998)。

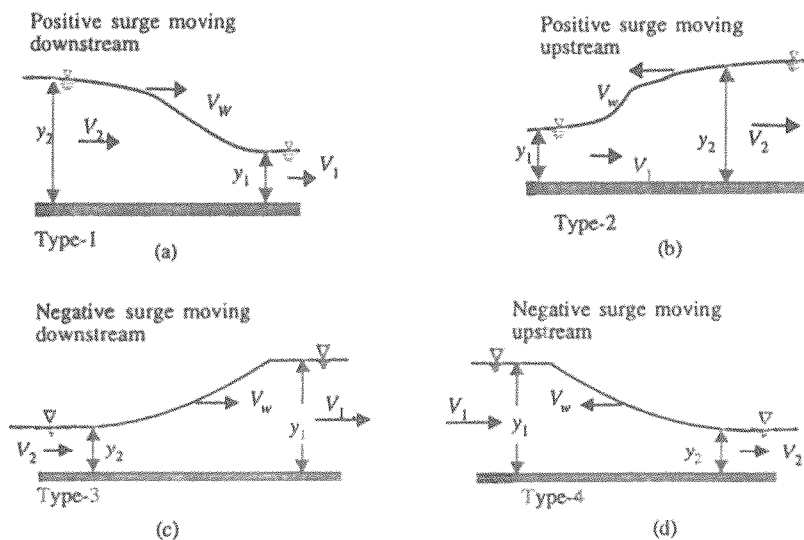


圖1. 湧浪的型態(Subramanya, 1985)
Figure 1. Types of surges. (Subramanya, 1985)

考慮一下游有水時之潰壩問題(Stoker, 1957), $t=0$ 的初始條件為

$$u = 0$$

$$h = \begin{cases} h_1 & (x \leq 0) \\ h_0 & (x > 0) \end{cases} \quad (1a,b)$$

當壩突然潰決後，會形成兩個主要的湧浪分別往上、下傳遞，在任何 $t > 0$ 流況分為 4 個區如圖 2 所示。其中(0)及(1)區為未受湧浪影響之區域，即其水深仍與潰壩前相同，而(2)區為一水深固定之區域，但其位置($x = \xi t$)卻隨向下游傳遞之湧浪(波速= ξ)所決定，(3)區為一連接(2)及(1)區之平滑曲線，其位置($x = c_1 t$)則依據向上游傳遞之湧浪(波速= $c_1 = \sqrt{gh_1}$)得到。Stoker(1957)導出了上述各區之解析解如下：

$$\frac{u_2}{c_0} = \frac{\xi}{c_0} - \frac{c_0}{4\xi} \left[1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{\xi}{c_0} \right)^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{c_2}{c_0} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{\xi}{c_0} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$\frac{u_2}{c_0} + 2 \frac{c_2}{c_0} = 2 \frac{c_1}{c_0} \quad (4)$$

其中， $c_0 = \sqrt{gh_0}$ 、 $c_1 = \sqrt{gh_1}$ 、 $c_2 = \sqrt{gh_2}$ 。因為 $h_1/h_0 = c_1^2/c_0^2$ 為已知條件，故聯立解(2)~(4)式可得到 u_2/c_0 及 c_2/c_0 ，

因此(2)區之 u_2 、 c_2 及 h_2 均可解出。而(3)區為稀疏波，銜接(1)區及(2)區，可以使用 $dx/dt = u_3 - c_3$ 來描述，其 u_3 、 c_3 由下式確定，水面線為拋物線。

$$u_3 = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x}{t} \right)$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \left(2c_1 - \frac{x}{t} \right) \quad (5a,b)$$

當 $h_0 \rightarrow 0$ 時，潰壩後產生的湧浪高度($h_2 - h_0$)很小，但 ξ 趨向無窮大，(2)區的長度縮小為零；當 $h_0 \rightarrow h_1$ 時，湧浪高度($h_2 - h_0$)亦會很小， ξ 趨向 c_1 ，(3)區的長度縮小為零(圖 3)。

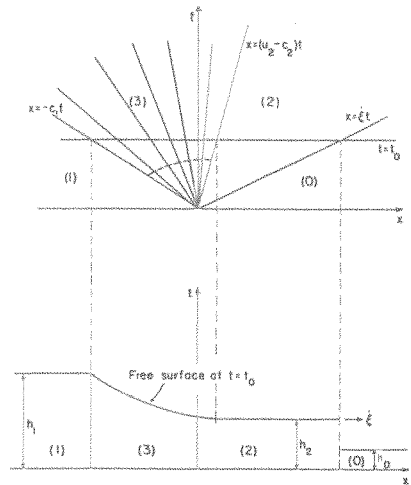


圖2. 潰壩示意圖(Stoker, 1957)
 Figure 2. Breaking of a dam. (Stoker, 1957)

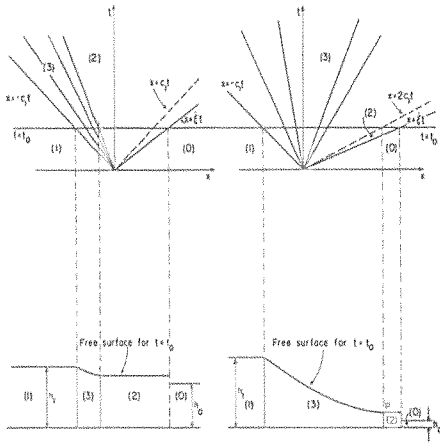


Fig. 10.8.7. Limit cases

圖3. 潰壩的極端情況(Stoker, 1957)
Figure 3. Limit cases. (Stoker, 1957)

數值計算方法

考慮一維非恆定流問題可採用 Saint Venant 方程式，其連續、動量方程分別列出如下(Chaudhry, 1993; Abbott, 1979)：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \right) = gh(S_0 - S_f) \quad \dots \quad (7)$$

式中 h 為水深， $q = hu$ 為單寬流量， u 為平均流速， S_0 為渠床坡度， S_f 為能量坡降與阻力有關。若考慮水平光滑渠底，則(7)式等號右邊為零，寫成向量型式如下：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\text{其中 } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}, \text{ 應}$$

用有限體積法 (finite volume method) 將(8)式離散化可得到一顯性離散格式如下：

$$\mathbf{U}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{U}_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* \right\} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 為進出控制體積之通量(flux)，因此只要能決定 $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 即可根據前一時距之 \mathbf{U}_i^t 計算下一時距之 $\mathbf{U}_i^{t+\Delta t}$ ，以下介紹兩種計算通量之數值方法。

1. PAVIA 數值方法(Braschi & Gallati, 1992)

將(7)式等號左邊之第二項展開，並略去等號右邊各項，再加上乘上 α 的(6)式，整理後可得

$$\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + (gh - u^2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} + (\alpha + 2u) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

$$\text{令 } \frac{gh - u^2}{\alpha} = \alpha + 2u, \quad \text{即}$$

$$\alpha^2 + 2u\alpha + (u^2 - gh) = 0, \quad \text{解方程式得}$$

$$\alpha = -u \pm \sqrt{gh}, \quad \text{代回(10)式得}$$

$$(-u \pm \sqrt{gh}) \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + (\pm \sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{\partial q}{\partial t} + (u \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots \quad (11)$$

若令 $\frac{dx}{dt} = \lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$ ，對其積分後為

$$\Lambda_{\pm} \equiv X_{\pm} = \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int \lambda_{\pm} dt, \quad \text{則形成二}$$

條特性線(characteristic) Λ_{\pm} 繪在 $x-t$ 平面上如圖 4 所示

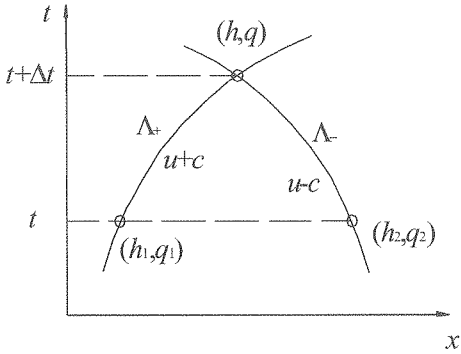


圖 4. 在 $x-t$ 平面上之特性線

Figure 4. Positive and negative characteristics.

故在特性線上之偏微分方程式可轉變為全微分方程式，即

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda_{\pm} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \lambda_{\pm} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{dt} \quad (12a,b)$$

因此(11)式可整理成

$$\frac{dq}{dt} = (u \mp \sqrt{gh}) \frac{dh}{dt} \quad (13)$$

i.e. $dq = (u \mp \sqrt{gh}) dh$ along

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_{\pm} = u \pm c, \quad c = \sqrt{gh} \quad (14)$$

為求出 $F_{i+\frac{1}{2}}^* = F^*(U_i, U_{i+1})$ ，若

$$F^* = \begin{bmatrix} q^* \\ \sigma^* \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \sigma = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2, \text{ 而上標}$$

“*”代表在元素邊界之物理量。根據(13)式可

得到兩條特性線方程式

$$\Delta q = q^* - q_+^i = (u - c)(h^* - h_+^i)$$

$$\Delta q = q^* - q_-^i = (u + c)(h^* - h_-^i) \quad (15a,b)$$

解(15a, b)兩式可得到 q^* ，同理 σ^* 也可用類似的方法獲得。將最後之結果整理如下：

當福祿數 $Fr > 1$ 時，

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = F_i^* \quad (16)$$

當福祿數 $Fr < 1$ 時，

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{(1+Fr)}{2} F_i^* + \frac{(1-Fr)}{2} F_{i+1}^* + \frac{c}{2} (1-Fr^2)(U_i^* - U_{i+1}^*) \dots$$

.....(17)

其中： $Fr = \frac{u_i + u_{i+1}}{c_i + c_{i+1}}$ ， $c = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}$ 。

2. Roe 數值方法(Toro, 1999)

由 (8) 式可得 $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ ，令

$$A(U) = \frac{\partial F_j}{\partial U_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}, \text{ Roe scheme 計算邊}$$

界通量之方法是將非線性方程組

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ 局部線性化而成為}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \text{ 其中 } \tilde{A}(U) \text{ 為由邊界左右兩}$$

側之 U_L 、 U_R 求出的 Roe 平均狀態，即

$$\tilde{A}(U) = \tilde{A}(U_L, U_R)。$$

在雅各比矩陣 (Jacobian matrix) \tilde{A} 轉化為雅各比常陣 (constant Jacobian matrix) 後，線性化方程組便可準確求解。

在決定 $\tilde{A}(U)$ 時有三個條件必須滿足：
 (1) \tilde{A} 和 A 一樣具雙曲性，且 \tilde{A} 有實數的特

徵值 (eigenvalues) 存在，例如 $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ ，同時亦可找到一組完整線性獨立的特徵向量 (eigenvectors)；(2) 具相容或一致性，即 $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$ ，因而在解光滑區 \mathbf{A} 連續；(3) 經過不連續處有守恆性，滿足 $\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$ ，即 $\Delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{U}$ (譚維炎，1998；Toro, 1999)。

因此，第一個問題先確定 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，找出 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}$ 的特徵值 (λ_1, λ_2) 及特徵向量 (\mathbf{K})

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \lambda_2 = u + \sqrt{gh} \quad (18a,b)$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}^{(1)} \quad \mathbf{K}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u - \sqrt{gh} & u + \sqrt{gh} \end{bmatrix} \quad (19)$$

再利用上述 Roe 之三個條件來求取 Roe 的平均狀態使得下式成立

$$\Delta \mathbf{U} = \sum_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \Delta \mathbf{F} = \sum_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)} \dots \dots \dots (20a,b)$$

式中， $\tilde{\alpha}_i$ 、 $\tilde{\lambda}_i$ 及 $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ 分別為 Roe 之 Jacobian 矩陣 $(\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U})$ 線性化之波強 (wave strength)、特徵值及特徵向量。依照 Roe 之平均變數 \tilde{h} 、 \tilde{u} 及 \tilde{gh} 參照(18a,b)及(19)式的形式可得到特徵值及特徵向量

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \sqrt{\tilde{gh}}, \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u} + \sqrt{\tilde{gh}}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{u} - \sqrt{\tilde{gh}} & \tilde{u} + \sqrt{\tilde{gh}} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21a-c)$$

將(20a)線性化後亦可得到波強

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \left(\Delta h - \frac{\tilde{h}}{\sqrt{\tilde{gh}}} \Delta u \right)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2} \left(\Delta h + \frac{\tilde{h}}{\sqrt{\tilde{gh}}} \Delta u \right) \quad (22a,b)$$

將上述結果代入(20b)式，再經由一些代數運算可解出 \tilde{h} 、 \tilde{u} 及 \tilde{gh}

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} u_R + \frac{\sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} u_L$$

$$\tilde{h} = \sqrt{h_R h_L}, \tilde{gh} = \frac{(gh_R + gh_L)}{2} \quad (23a-c)$$

最後元素邊界之通量可表示為

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}^{(i)} \dots \dots \dots (24)$$

分析與討論

1. 數值模式驗證

考慮一 Stoker 之潰壩問題，整個水平光滑渠道長 2000 m，壩址在 $x=1000$ m 處，壩上游水深為 10 m，壩下游水深為 1 m (Wang & Shen, 1999)。應用本文之數值方法：網格大小取 2 m；時間間距以 Courant-Friedrichs-Lewy 條件決定，即 $\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)}$ ，其中 CFL=0.9 可達穩定收斂。分別採用 PAVIA 及 Roe 之數值方法進行演算，並與 Stoker 之解析解比較，其 $t=30、60、90$ sec 之水深及平均流速如圖 5 及圖 6 所示。從圖中可以看出，解析解與數值解十分吻合，數值解在劇烈變化處較解析解平滑，而且應用不同數值方法所得之結果幾乎一致，因為 PAVIA 與 Roe 雖從不同角度出發，但推衍至最後之形式差不多，其唯一之差異僅在元素邊界數值通量不

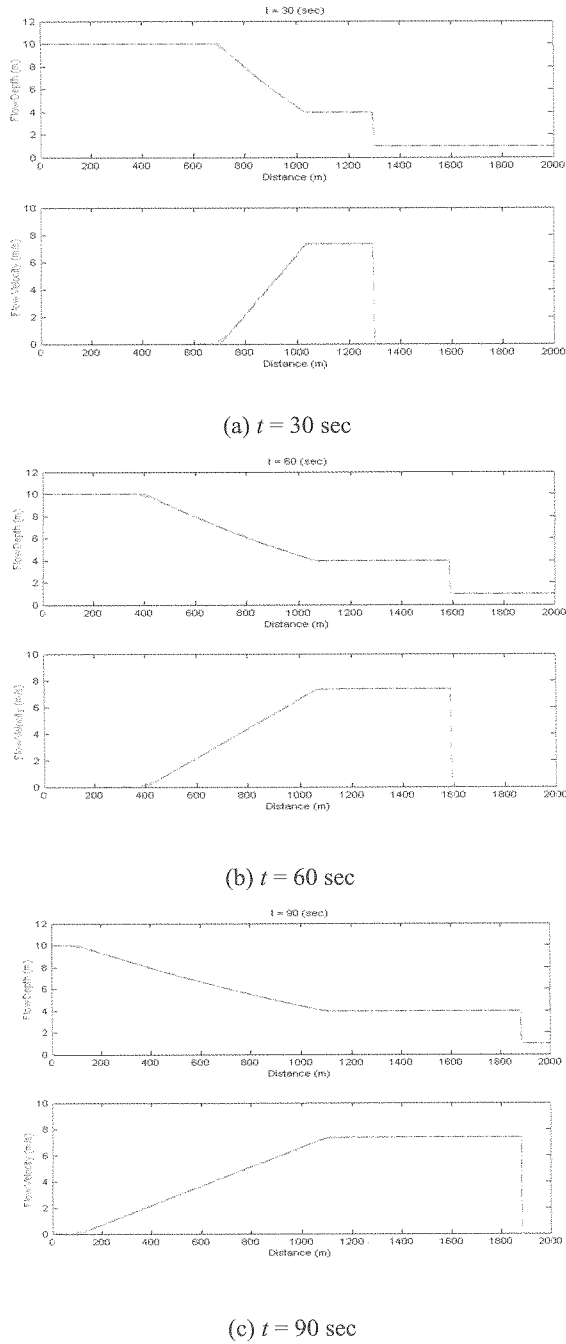


圖5. 解析解與數值解之比較 (Stoker's analytic solution: —; PAVIA numerical solution: - · -)
 Figure 5. Comparison of analytic and numerical solutions. (Stoker's analytic solution: —; PAVIA numerical solution: - · -)

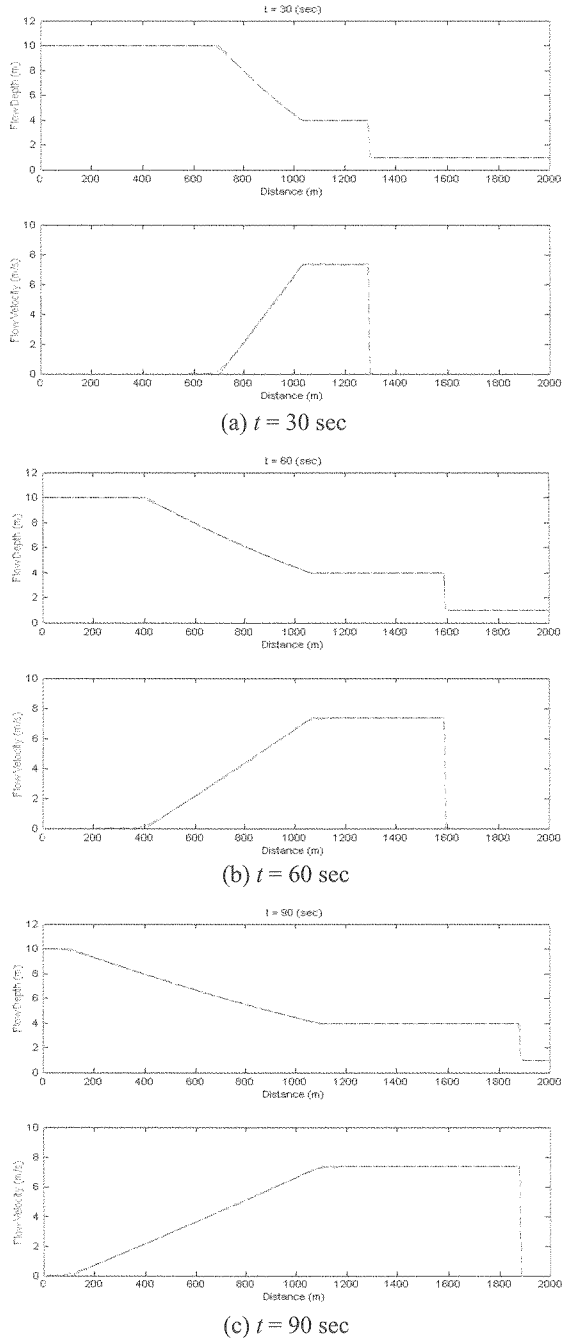


圖6. 解析解與數值解之比較 (Stoker' s analytic solution: —; Roe numerical solution: - - -)
 Figure 6. Comparison of analytic and numerical solutions. (Stoker' s analytic solution: —; Roe numerical solution: - - -)

連續處所採取之平均方法不同，PAVIA 使用較簡單之算術平均概念，而 Roe 則考慮物理量本身特性取加權平均。PAVIA 僅能適用於一維水流問題，Roe 則可應用至較多問題上，只要線性化矩陣之特徵值及特徵向量求得到。

2. 模式與實驗之比較

實驗設備為一長 1.0 m、寬 0.1 m、高 0.15 m 之壓克力模型水槽，兩端封閉，坡度為零，在 $x=0.35$ m 處設一閘門可快速開啟。起始條件為壩前上游水深 $h_1=0.1$ m，壩後下游水深為 $h_0=0.01$ m，閘門開啟後以數位攝影機拍攝整個過程，經過影像處理可得到不同時距每個斷面之水深。因為 PAVIA 與 Roe 之方法獲致結果差異不大，故此處以 Roe 之模式為主與實驗結果進行比較，模擬之 Δx 取 0.01 m， Δt 為配合數位攝影機之解析度，定為 1/299.7 sec，經檢算後亦可符合 CFL 條件，邊界條件使用 $q_{i+1}=q_i$ 及 $h_{i+1}=h_i$ 來模擬固定邊壁。其結果如圖 7 所示，從模擬結果看來，潰壩後一瞬間之差異較大，可能是閘門開啟速度不夠快，但在隨後之 $t=0.3$ sec、 $t=0.4$ sec 則數值模擬的還不錯，經過較長時間，其實驗與模擬的差異又再顯現，且愈來愈大。原因可能因為：(1)模式忽略摩擦力(包括底床及閘門位置)；(2)水槽幾何尺寸之影響，因為水會在封閉空間內來回振盪，形成類似駐波之現象，本模式無法模擬(但是本模式可以計算遇到邊壁產生反向湧浪的情形)；(3)模式本身使用顯性格式，長時間預測會有誤差。所幸潰壩問題並不需要長時期預測，故採用顯式格式可加快計算時間並無不妥，未來可改善閘門開

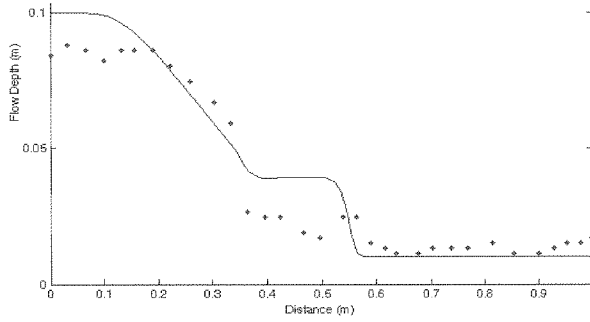
啟方式，並增加模式之摩擦力效應，應可得到更佳之結果。

結 論

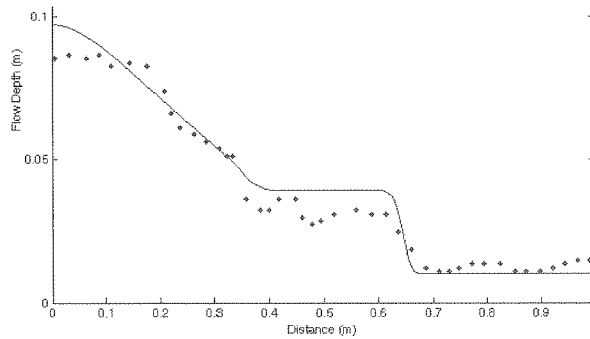
本研究應用有限體積法建立計算非恆定水流之數值模式，針對潰壩問題與 Stoker 之解析解比較十分吻合。並經過水槽試驗驗證，在某些情形下亦可獲致不錯的效果。透過本研究介紹之數值方法，針對潰壩或閘門開啟造成不連續之湧浪傳遞問題之處理，較傳統有限差分模式佳，且速度亦快。對於類似水躍(hydraulic jump)之急變流等，亦可有效模擬。且經由自行撰寫之程式在計算過程中可即時顯示結果，有助於物理現象之了解及易於隨時修正錯誤。未來若再增加底床坡度及摩擦力效應，可應用至更廣泛之層面，對一些較複雜之水理分析可提供更進一步的協助，增進對問題的了解與分析。

參考文獻

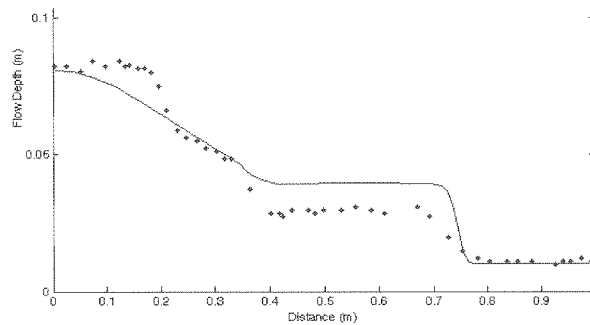
1. 譚維炎(1998)，「計算淺水動力學—有限體積法的應用」，清華大學出版社。
2. Abbott, M. B. (1979), *Computational Hydraulics, elements of the theory of free surface flows*, Pitman.
3. Braschi, G. and Gallati, M. (1992), "A conservative flux prediction algorithm for the explicit computation of transcritical flow in natural streams," In *Hydraulic Engineering Software IV: fluid flow modeling* (ed. W. R. Blain and E. Cabrera), pp. 381-394. Computational Mechanics Publications and Elsevier. Chaudhry, M. H. (1993), *Open-Channel Flow*, Prentice-Hall.



(a) $t = 0.2$ sec



(b) $t = 0.3$ sec



(c) $t = 0.4$ sec

圖 7. 數值解與實驗結果之比較 (experiment data: ●●●; numerical solution: ——)
Figure 7. Comparison of numerical solution and experiment data. (experiment data: ●●●; numerical solution: ——)

4. Stoker, J. J. (1957), *Water Waves*, Interscience.
5. Subramanya, K. (1985), *Flow in Open Channels*, McGraw-Hill.
6. Toro, E.F. (1999), *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, 2nd ed., Springer, Berlin.
7. Wang, Z. L. and H. T. Shen (1999), "Lagrangian Simulation of One-Dimensional Dam-Break Flow," *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 125(11): 1217-1221.

92年09月06日 收稿

92年10月15日 修正

92年10月20日 接受