

Philip入滲方程式計算超滲雨量之探討

盧惠生⁽¹⁾、鄭皆達⁽²⁾、林壯沛⁽³⁾

摘要

本省偏遠山區缺乏水文資料，暴雨流量歷線多仰賴推估，而超滲雨量歷線的計算為流量歷線推估之基石。Philip入滲方程式，為僅具有二個參數的入滲推估式，且它的參數具有物理意義，本文乃探討如何以Philip入滲方程式，引入降雨歷線，以計算超滲雨量，俾利暴雨流量歷線之推估更為合理。

一、前言

有關小集水區治理計劃的各項工作，舉凡防砂工程、排水工程、溪流整治及坡地水土保持措施等，皆需於治理前了解逕流特性，也就是希望知道不同頻率年之暴雨型態與歷線，可能產生的暴雨逕流歷線，然後予以適當的治理規劃，以期降低暴雨逕流歷線的洪峰與逕流量，並延長暴雨逕流歷線的洪峰時間與基流時間。然大多數需整治的小集水區，由於山區交通不便、經費短缺及人力不足等實際問題，不易設置水文觀測站，致暴雨逕流歷線之實測資料，自然無法取得，必須仰賴推估，況且治理後之暴雨逕流歷線，事前無法觀測，更須依靠推估。

然推估暴雨逕流歷線的過程中，如何估計多少降雨滲入土中？並據以計算超滲雨量歷線(Excess rainfall)，是頗為值得重視的問題，因有了超滲雨量歷線後，不論以各種單位歷線法、貯留函數法及運動波模式法等方法，皆可迅

速獲得暴雨逕流歷線。

超滲雨量歷線的計算方法，較為簡易的方法，可使用 ϕ 入滲指數法或W入滲指數法，以平均單位時間之入滲率引入降雨歷線中，計算超滲雨量歷線。然入滲率是隨時間而變化，也就是降雨開始時入滲率極大，以後隨時間持續而減小。因而近年來水文學者，常以入滲方程式計算入滲率變化，引入降雨歷線中，以計算超滲雨量，而入滲率方程式種類甚多，Hillel(1982)舉出Green & Ampt、Kostiakov、Horton、Philip及Hortan等入滲方程式，其中以Philip與Green-Ampt兩個入滲方程式較具有物理意義，本文乃探討如何以Philip入滲方程式，引入降雨歷線，以計算超滲雨量歷線。

二、Philip入滲方程式

Philip(1957)以Richards(1931)的土壤水分垂直移動方程式為起點，以波茲曼(Boltzmann)轉換法及指數級數法求解，獲得一個甚為簡易的近似值解方程式(式1,2)，此方程式僅

(1)台灣省林業試驗所集水區經營系副研究員。

(2)(3)國立中興大學水土保持研究所教授，博士班研究生

有二個參數(s, k) , 且這兩個參數具有物理意義。

$$F = s t^{1/2} + k t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$f = (s/2) t^{-1/2} + k \quad \dots\dots\dots (2)$$

式中F：累積入滲率(L)

f：入滲率(L/T)

s：吸著力(Sorptivity)(L/T^{1/2})

k：相當於飽和土壤導水度(L/T)

t：時間(T)

Philip入滲方程式中的參數，吸著力(s)與相當於飽和土壤導水度(k)，經盧等(1993)使用台中畢祿溪與南投蓮華池的野外入滲試驗資料，以簡易的直線迴歸法獲得。

三、降雨強度與入滲的關係

往昔使用入滲方程式計算超滲雨量時，往往直接將時間(t)代入入滲方程式中，即式(2)，計算入滲率(f)，再將降雨強度減去入滲率，即為超滲雨量。

事實上，入滲率因降雨強度的變異，無法直接由入滲方程式計算入滲率，必須調整時間尺度。茲將降雨強度的特性粗略分為三類，俾利說明(Mein & Larson,1973)。

(一)降雨強度(i)小於或等於土壤飽和導水度(k_s)：即i ≤ k_s，此時降雨由開始至終止，降雨全部滲入土中，致入滲率(f)等於降雨強度(i)，f=i。

(二)降雨強度(i)大於土壤飽和導水度(k_s)，而降雨延時(t_r)大於地表滯流開始形成的時間(t_{pt})(Ponding time)：即i > k_s, t > t_r，此時降雨在開始時，不會有地表逕流發生，過了一段時間後，才会有地表逕流。故降雨強度與入滲率的關係可分成二段時間討論。

1. 當降雨時間(t)小於或等於地表滯流開始的時間(t_{pt})：即t ≤ t_{pt}，此時仍然不會有地表逕流，故入滲率(f)等於降雨強度(i)，f=i。

2. 當降雨時間(t)大於地表滯流開始的時間(t_{pt})：即t > t_{pt}，此時會有地表逕流，其入滲率(f)的計算可由入滲方程式計算，但入滲方程式內的時間(t)因子，須調整時間尺度(Adjusted time scale)，才可代入入滲方程式計算。

(三)降雨強度(i)大於土壤飽和導水度(k_s)，而降雨延時(t_r)小於地表滯流開始形成的時間(t_{pt})：即i > k_s, t_r < t_{pt}，此時亦不會有地表逕流，故入滲率(f)等於降雨強度(i)，f=i。

四、應用 Philip 入滲方程式計算超滲雨量

由前節可言，當降雨強度大於土壤飽和導水度，且降雨延時(t_r)大於地表滯流開始時間(t_{pt})，入滲方程式才有益於計算入滲率，故本節僅討論此種狀況。因其它二種狀況，入滲率等於降雨強度。Cundy(1990,1992)曾將 Philip 入滲方程式計算入滲率的程序，予以數學模型化，本文乃採用Cundy的數學模型來說明。

假設 Philip 入滲方程式，當降雨強度(i)等於入滲率(f)時，i=f，將發生瞬間地表滯流，此時間為地表滯流發生之等值時間(Equivalent time to ponding)(t_s)圖(1)，將i與t_s代入 Philip 入滲方程式(2)，可改寫為式(3)。

$$i = f = (s/2) t_s^{-1/2} + k \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)整理如下式，

$$t_s = [s / (2(i-k))]^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

然 t_s 時間的累積入滲量(F_s)，可將 t_s 置換 t，代入式(2)中，計算而得，如下式。

$$F_s = s t_s^{1/2} + k t_s \quad \dots\dots\dots (5)$$

由於供給入滲的水量，並不是入滲率曲線，而是降雨強度(i)，故實際上的地表滯流發生時間(time to ponding)(t_{pt})，應由下式計算。

$$t_{pt} = F_s / i \quad \dots\dots\dots (6)$$

然實際上的地表滯流發生時間(t_{pt})要比由式(4)入滲率曲線計算的 t_s 時間為大, 而入滲率計算必須受到累積入滲率(F)的作用, 故實際上地表發生滯流以後, 入滲率(f)的計算, 必須以 $(t-t_{pt}+t_s)$ 代入 t 中, 以資修正。而 t_{pt} 時間以前的入滲率(f)等於降雨強度(i)。故Philip入滲方程式的時間(t), 必須修正(圖1), 如下式。

$$f = (s/2)(t-t_{pt}+t_s)^{-1/2} + k \dots\dots\dots (7)$$

至於 t_{pt} 時間以前的入滲容量 (Infiltration capacity)則須以累積入滲量來推導, 將式(2)整理如下,

$$t = [s / (2(f-k))]^2 \dots\dots\dots (8)$$

將式(8)代入式(1)中,

$$F = s [s / (2(f-k))] + k [s / (2(f-k))]^2 \\ F(f-k)^2 - (s^2/2)(f-k) - k s^2/4 = 0 \dots\dots\dots (9)$$

式(9)為以 $(f-k)$ 為變數的二次方程式, 由二項式定理, 可解 $(f-k)$ 如下

$$f - k = [(s/2) \pm \sqrt{s^4/4 + Fk s^2}] / (2F) \dots\dots\dots (10)$$

式(10)中的等號右側 $\pm \sqrt{(s^4/4 + Fk s^2)}$ 項, 由於 $f-k$ 必須要大於0, 才有意義。故 $\sqrt{(s^4/4 + Fk s^2)}$ 只能選擇正值, 因而式(10)改為下式,

$$f = k + s^2/(4F) + (s/4F)\sqrt{s^2 + 4Fk} \quad (11)$$

式(11)為求解Philip入滲率(f), 該方程式使用累積入滲量(F)、吸著力(s)及相當於飽和土壤導水度(k)來計算入滲率(f)。

(一)均勻降雨強度之降雨($i > k_s, t > t_r$)

計算入滲步驟:

步驟1: 計算 t_s , 使用式(4),

$$t_s = [s / (2(i-k))]^2$$

步驟2: 計算 F_s , 將 $t_s = [s / (2(i-k))]^2$ 代入式

(1) $F = s t^{1/2} + k t$ 中, 令 $F_s = F(t_s)$, 則發生地表滯流時的累積入滲量(F_s), 可由下式表示

$$F_s = k [s / (2(i-k))]^2 + s [s / (2(i-k))] \dots\dots\dots (12)$$

步驟3: 計算 t_{pt}

實際上之地表滯流發生時間(t_{pt}), 仍然由式(6)的型態 $t_{pt} = F_s/i$ 計算。

步驟4:

當降雨時間小於地表滯流發生時間(t_{pt})時, 即 $t \leq t_{pt}$, 其累積入滲量(F)與入滲率(f)之計算如下,

$$F = i t$$

實際入滲率為 i , 但入滲容量 f (Infiltration capacity)如式(11):

$$f = k + s^2/(4F) + s/(4F)\sqrt{s^2 + 4Fk}$$

步驟5:

當降雨時間大於地表滯流發生時間(t_{pt})時, 即 $t > t_{pt}$, 其累積入滲量(F)與入滲率(f)之計算如下,

$$F = F_s + k(t-t_{pt}) + s [(t-t_{pt}+t_s)^{1/2} - t_s^{1/2}] \dots\dots\dots (13)$$

$$f = k + (s/2)(t-t_{pt}+t_s)^{-1/2} \dots\dots\dots (14)$$

(二)不均勻降雨強度之降雨($i > k_s, t > t_r$)計算入滲率步驟(圖2):

步驟1: 測試降雨是否立刻形成地表滯流, 輸入降雨強度數據, Philip入滲參數 k, s , 假設 $f_{j-1} = \infty$ 。

比較 $i(\Delta t_j) > f_{j-1}$?

(1)如果 $i(\Delta t_j) \geq f_{j-1}$, 則使用式(4), (5), (13), (14)稍加變形。

$$t_s = [s / (2(f_{j-1}-k))]^2$$

$$t_{pt} = t_{j-1}$$

$$F_s = s t_s^{1/2} + k t_s$$

$$F_j = F_s + k(t_j - t_{pt}) + s [(t_j - t_{pt} + t_s)^{1/2} - t_s^{1/2}]$$

$$f_j = k + (s/2)(t_j - t_{pt} + t_s)^{-1/2}$$

重回到步驟1

(2)如果 $i(\Delta t_j) < f_{j-1}$, 則步行驟2

步驟2: 測試單位時間(Time interval)內之降雨強度是否不產生地表逕流, 使用式(11),

$$F_j = F_{j-1} + i(\Delta t_j)\Delta t$$

$$f_j = k + s^2/(4F_j) + (s/4F_j)\sqrt{s^2 + 4F_j k}$$

比較 $i(\Delta t_j) \leq f_j$?

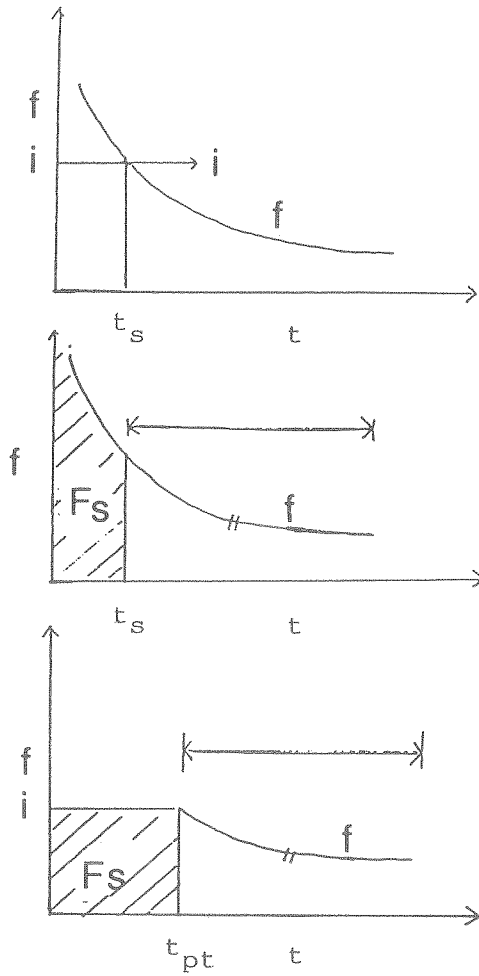


圖1. 降雨與入滲曲線關係。

(上圖 i 表示均一降雨強度中圖斜線面積 F_s 等於下圖斜線面積 F_s ，中圖 | \leftrightarrow | 內的 f 曲線與下圖 | \leftrightarrow | 內的 f 曲線是相同的。

Fig.1. The relationship between rainfall and infiltration.

(i =uniform and steady rainfall intensity in upper figure, F_s of shade area in middle figure = F_s of shade area in lower figure, f curve within | \leftrightarrow | in middle figure = f curve within | \leftrightarrow | in lower figure).

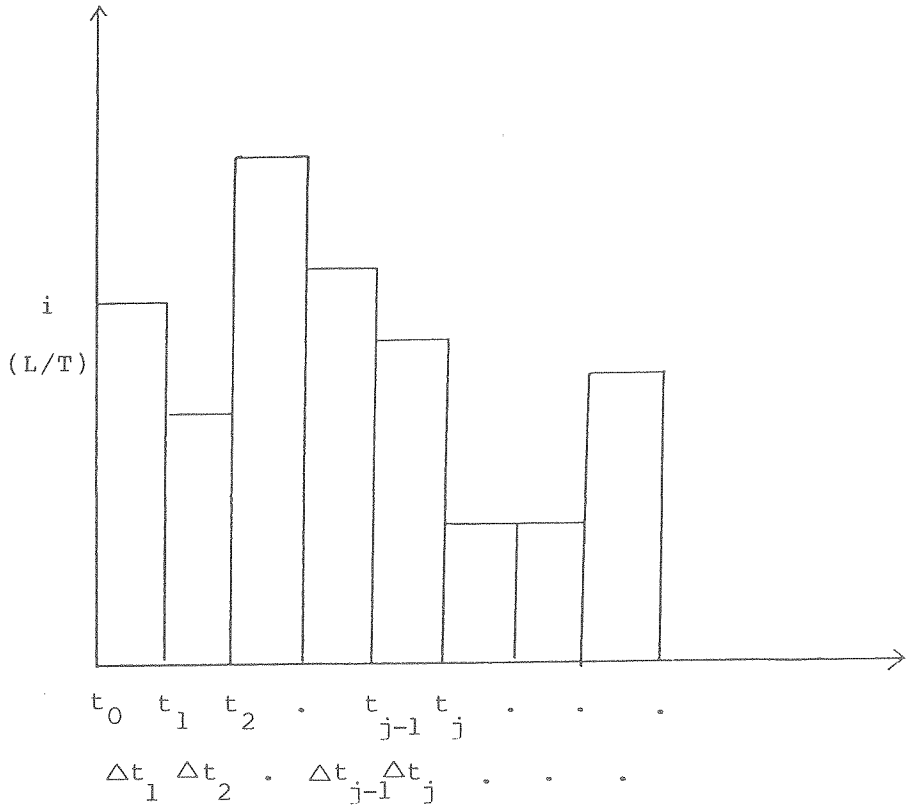


圖2. 降雨歷線示意圖

Fig.2 Rainfall hyetograph

(1)如果 $i(\Delta t_j) \leq f_j$ ，則單位時間內之降雨強度不產生地表滯流，重回步驟1

(2)如果 $i(\Delta t_j) > f_j$ ，則單位時間內之降雨強度產生地表滯流，亦使用式(4), (5), (6), (13), (14), 並稍加變形。

$$t_s = \left(s / (2(i(\Delta t_j) - k)) \right)^2$$

$$F_s = s t_s^{1/2} + k t_s$$

$$t_{pt} = t_{j-1} + (F_s - F_{j-1}) / i(\Delta t_j)$$

$$F_j = F_s + k (t_j - t_{pt}) + s \left\{ (t_j - t_{pt} + t_s)^{1/2} - t_s^{1/2} \right\}$$

$$f_j = k + (s/2)(t_j - t_{ps} + t_s)^{-1/2}$$

重回步驟1

自然降雨的實際入滲率獲得以後，較為簡單的計算超滲雨量方法，乃將降雨強度歷線減掉入滲率。如果考慮地表凹蓄量 (Depression storage) 的扣除，則將已經減掉入滲率之降雨強度歷線，再扣去其初期的降雨強度累積至地表凹蓄量的深度，也就是超滲雨量的開始時間，還需延後一些。然地表凹蓄量的大小，依地面粗糙度、地形及土地利用而變異甚大，且不易獲得可靠的資料，是一項難題，尙待研究人員繼續努力，以獲得可靠的地表凹蓄量資料。

五、結語

Philip 入滲方程式，僅具有二個參數，一為吸著力，另一為相當於飽和土壤導水度，這二兩個參數具有物理意義。故將 Philip 入滲方程式引入降雨歷線中，以計算超滲雨量，從而推估暴雨逕流歷線，將更為合理。

參考文獻

1. 盧惠生、胡蘇澄1993.應用Philip入滲模式推估台灣中部山地土壤入滲，未發表。
2. Cundy, T.W. 1990. Lecture note of hillslope hydrology. University of Washington, Seattle.
3. Cundy, T.W. 1992. Theoretical hillslope hydrology. pp.1-64. 台灣省林業試驗所主辦"坡地水文及泥砂運移研討會"論文集, p.1-64
4. Mein, R.G. and C.L. Larson. 1973. Model-

ing infiltration during a steady rain. Water Resources Research 9(2):384-394.

5. Hillel, D. 1982. Introduction to soil physics. Academic Press.
6. Philip, J.R. 1957. The theory of infiltration : 4. sorptivity and algebra infiltration equation. Soil Sci.84: 257-264.
7. Richards, L.A. 1931. Capillary condition of liquids through porous mediums. J. Applied Physics (1):318-333.

A Study on the Calculation of Excess Rainfall with Philip's Infiltration Equation

*H. S. Lu*¹ *J. D. Cheng*² *J. P. Lin*³

Summary

It is often required to estimate streamflow hydrographs from rainfall data for many streams in the mountainous areas of Taiwan due to the lack of hydrometric data. Philip's equation contains only two parameters in infiltration estimates. Moreover, the two parameters are physically meaningful. This paper explores how excess rainfall can be calculated with Philip's infiltration equation from rainfall hyetographs.

1. Associate Research Scientist, Watershed Management Division, Taiwan Forestry Research Institute.

2,3 Professor and Graduate Student respectively, Soil and Water Conservation Department, National Chung Hsing University.